Coefficients de transport par la théorie des échelles multiples de temps

François Coppex

9 juillet 2002

Résumé

Nous étudions à l'aide de l'équation de Boltzmann linéaire dans l'approximation hydrodynamique les coefficients de transport (conductivité thermique λ, viscosité de cisaillement η et volumique ζ) d'un gaz de molécules maxwelliennes avec force d'interaction $\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{r}) = \mathcal{X}||\mathbf{r}||^{-5}$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$. En appliquant la théorie des échelles multiples de temps on désire dégager les coefficients correspondants à chaque échelle de temps (balistique, propagative, diffusive). On réalise donc un développement en puissance du petit paramètre ε (rapport des énergies d'interaction entre molécules et thermique). Pour des molécules maxwelliennes, les fonctions et valeurs propres sont connues. Pour un modèle homogène, on obtient des coefficients de transport identiquement nuls pour toute échelle de temps. En effet, ces coefficients sont engendrés par les fluctuations et courants, absents du modèle homogène. Dans le cas du modèle inhomogène à l'équilibre local (de variables locales densité, température et vitesse moyenne du fluide), on distingue deux échelles de temps privilégiées. L'échelle balistique $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ engendre les mêmes coefficients que ceux déjà établis dans la littérature (voir [CC]). La seconde est l'échelle propagative, qui apporte des corrections, ces derniers restant alors inchangés pour les échelles ultérieures. Les coefficients de conductivité thermique et de viscosité de cisaillement deviennent nuls, de même pour la viscosité volumique ζ qui reste nulle.

Table des matières

Chapitre 1

Hypothèses et modélisation

1.1 Hypothèses

Soit un gaz de particules identiques de masse m, sans structure interne, et subissant des collisions binaires uniquement.

Hypothèse 1.1.1 (Approximation hydrodynamique) *Supposons que le système soit suffisamment proche de l'équilibre local de sorte que l'on puisse écrire la fonction de distribution comme celle de l'équilibre local donnant les propriétés d'équilibre, auquel s'ajoute une perturbation donnant les courants, alors*

$$f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = \underbrace{f_e(\mathbf{r},\mathbf{p},t)}_{\textit{propriétés d'équilibre}} + f_e(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\underbrace{\Phi(\mathbf{r},\mathbf{p},t)}_{\textit{courants}} \tag{1.1}$$

$$f_e(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = \frac{n(\mathbf{r},t)}{(2\pi m k_B T(\mathbf{r},t))^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{p}-m\mathbf{v}(\mathbf{r},t))^2}{2mk_B T(\mathbf{r},t)}\right), \tag{1.2}$$

avec $n(\mathbf{r},t)$ la densité de particules, $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ la vitesse moyenne et $T(\mathbf{r},t)$ la température locale.

Avec cette définition la normalisation de f_e est

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{p}\ f_e(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = n(\mathbf{r},t) \tag{1.3}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3\times\Omega} \mathrm{d}^3\mathbf{p}\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}\ f_e(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = N, \tag{1.4}$$

où Ω est le volume de confinement du gaz. On impose de plus que les propriétés d'équilibre soient données par $f_e(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$, et avec ces notations les grandeurs d'équilibre local (densité locale de particules $n(\mathbf{r},t)$, vitesse locale du fluide

$\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$, température locale $T(\mathbf{r},t)$) sont données par

$$\begin{aligned}
n(\mathbf{r},t) &\overset{\text{déf.}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{p}\ f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) && (1.5)\\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{p}\ f_e(\mathbf{r},\mathbf{p},t) && (1.6)\\
m\mathbf{v}(\mathbf{r},t) &\overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{n(\mathbf{r},t)} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{p}\ \mathbf{p}\, f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) && (1.7)\\
&= \frac{1}{n(\mathbf{r},t)} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{p}\ \mathbf{p}\, f_e(\mathbf{r},\mathbf{p},t) && (1.8)\\
\tfrac{3}{2} n(\mathbf{r},t) k_B T(\mathbf{r},t) &\overset{\text{déf.}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{p}\ \frac{(\mathbf{p}-m\mathbf{v})^2}{2m}\, f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) && (1.9)\\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{p}\ \frac{(\mathbf{p}-m\mathbf{v})^2}{2m}\, f_e(\mathbf{r},\mathbf{p},t). && (1.10)
\end{aligned}$$

La troisième relation est l'équipartition de l'énergie pour des particules ponctuelles (3 degrés de liberté). Ces équations impliquent que $f_e(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\Phi(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ doit satisfaire

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{p}\ \chi_i(\mathbf{p}) f_e(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\Phi(\mathbf{r},\mathbf{p},t) &= 0, \qquad \forall\, i = 1,\ldots,5 && (1.11)\\
\chi_i(\mathbf{p}) &= \{1,\, p_1,\, p_2,\, p_3,\, \mathbf{p}^2\}, && (1.12)
\end{aligned}$$

ce qui définit les invariants de collision $\{\chi_i(\mathbf{p})\}_{i=1}^5$.

Hypothèse 1.1.2 (Équation de Boltzmann linéaire) *L'équation de Boltzmann linéaire au premier ordre en Φ est*

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} f_e(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = f_e(\mathbf{r},\mathbf{p},t) L[\Phi], \tag{1.13}$$

avec

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m}\cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}} + \mathbf{F}(r)\cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}}, \tag{1.14}$$

et l'opérateur de collision linéaire L défini par

$$\begin{aligned}
L[\Phi] = \int_{\mathbb{R}^{3\times 2}} & \mathrm{d}^3\mathbf{p}_1\, \mathrm{d}^3\mathbf{e}'\ \frac{|\mathbf{p}_1-\mathbf{p}|}{m}\, \sigma\left(\chi,\, \tfrac{|\mathbf{p}_1-\mathbf{p}|}{m}\right) f_e(\mathbf{r},\mathbf{p}_1,t)\times\\
&\times \Big(\Phi(\mathbf{r},\mathbf{p}_1^f,t) + \Phi(\mathbf{r},\mathbf{p}^f,t) - \Phi(\mathbf{r},\mathbf{p},t) - \Phi(\mathbf{r},\mathbf{p}_1,t)\Big), \qquad (1.15)
\end{aligned}$$

avec σ la section efficace différentielle, $\mathbf{e}'$, $\mathbf{p}^f$ ainsi que $\mathbf{p}_1^f$ qui sont définis par (2.11), (2.23), (2.24) et (2.25).

L'établissement du membre de gauche de l'équation de Boltzmann linéaire (1.13) n'est pas trivial (voir [Be] p. 98, [Kr] ou [CC] p.111). Un argument heuristique est

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) &= \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} f_e(\mathbf{r},\mathbf{p},t) + \underbrace{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} f_e(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\Phi(\mathbf{r},\mathbf{p},t)}_{=L[f_e\Phi]=\mathcal{O}(\Phi^2)} && (1.16)\\
&= \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} f_e(\mathbf{r},\mathbf{p},t). && (1.17)
\end{aligned}$$

Hypothèse 1.1.3 (Libre parcours moyen) *On suppose que les fluctuations de densité $n(\mathbf{x}, t)$ sont suffisamment faibles pour considérer en bonne approximation le libre parcours moyen constant.*

$$\lambda(\mathbf{r}, t) = \underbrace{\lambda\Big(n(\mathbf{r}, t) = \langle n(\mathbf{r}, t)\rangle\Big)}_{\doteqdot \lambda_{\mathrm{mfp}}} + \mathcal{O}\left(\Delta n\right) \tag{1.18}$$

Cette dernière hypothèse, qui n'en est pas vraiment une, est nécessaire pour arriver à dégager un petit paramètre dans notre théorie. En effet, lors de l'adimentionalisation (voir (2.9) et (2.12)), on introduit une grandeur ayant les dimensions d'une longueur, notée λ_{mfp}. En ordonnant les variables dimensionnelles, on voit apparaître un terme qui peut s'interpréter comme un petit paramètre ε (voir 2.13) étant le rapport de l'énergie transmise à une particule de masse m par le champ d'interaction moyen sur son énergie thermique, si on interprète λ_{mfp} comme étant son libre parcours moyen. On peut ainsi prendre une valeur de λ_{mfp} "suffisamment" proche de la valeur moyenne du libre parcours moyen, donnant ainsi un sens et une interprétation au petit paramètre λ_{mfp}. Ainsi, seule l'interprétation de λ_{mfp} est importante, ce qui laisse une certaine liberté pour le choix de sa valeur, et par conséquent justifie pleinement l'hypothèse 1.1.3.

1.2 Expression générale des coefficients de transport

Les lois phénoménologiques linéaires de transport de la chaleur de Fourier

$$\mathbf{j}_q(\mathbf{r}, t) = -\lambda \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}} T(\mathbf{r}, t) \tag{1.19}$$

($\mathbf{j}_q$ étant le courant d'énergie) ainsi que de friction de Newton (fluide Newtonien)

$$\boldsymbol{P} = p(\mathbf{r}, t)\mathbb{1} - 2\eta\left(\boldsymbol{\Lambda} - \tfrac{1}{3}\mathbb{1}\left(\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)\right)\right) - \zeta\mathbb{1}(\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)) \tag{1.20}$$

définissent les coefficients de conductivité thermique λ, de viscosité de cisaillement η et de viscosité volumique ζ, avec

$$\Lambda_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial r_j} + \frac{\partial v_j}{\partial r_i}\right) \tag{1.21}$$

le tenseur des contraintes. $p(\mathbf{r}, t)$ est la pression hydrostatique locale. On remarque que η agit sur les termes non diagonaux de la pression, tandis que ζ sur les termes diagonaux. D'autre part, la description microscopique donne

$$\begin{aligned}
P_{ij}(\mathbf{r},t) &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{p}\, \frac{(\mathbf{p}-m\mathbf{v})_i(\mathbf{p}-m\mathbf{v})_j}{m} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) \\
&\overset{(1.1)}{=} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{p}\, \frac{(\mathbf{p}-m\mathbf{v})_i(\mathbf{p}-m\mathbf{v})_j}{m} f_e(\mathbf{r},\mathbf{p},t)}_{=p\mathbb{1}} \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{p}\, \frac{(\mathbf{p}-m\mathbf{v})_i(\mathbf{p}-m\mathbf{v})_j}{m} f_e(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\Phi(\mathbf{r},\mathbf{p},t) \qquad (1.22) \\
\mathbf{j}_q(\mathbf{r},t) &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{p}\, \frac{\mathbf{p}-m\mathbf{v}}{m}\frac{(\mathbf{p}-m\mathbf{v})^2}{2m} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) \\
&\overset{(1.1)}{=} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{p}\, \frac{\mathbf{p}-m\mathbf{v}}{m}\frac{(\mathbf{p}-m\mathbf{v})^2}{2m} f_e(\mathbf{r},\mathbf{p},t)}_{=0} \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{p}\, \frac{\mathbf{p}-m\mathbf{v}}{m}\frac{(\mathbf{p}-m\mathbf{v})^2}{2m} f_e(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\Phi(\mathbf{r},\mathbf{p},t). \qquad (1.23)
\end{aligned}$$

La nullité du premier terme de (1.23) découle du fait qu'à l'équilibre les courants sont nuls. En égalant les lois macroscopiques et microscopiques on obtient les coefficients de transport λ et η. On voit que pour faire la connexion entre description macro et microscopique pour en tirer λ, η et ζ, il faut arriver à mettre en évidence $\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{r}T(\mathbf{r},t)$, $\boldsymbol{\Lambda}$ et $\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{r}\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ respectivement dans les expression microscopiques.

Chapitre 2

Application de la théorie des échelles multiples de temps

2.1 Adimentionalisation

2.1.1 Équation de Boltzmann non linéaire

L'équation de Boltzmann *non* linéaire est

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = I[f], \tag{2.1}$$

avec $I[f]$ l'opérateur de collision *non* linéaire

$$I[f] = \int_{\mathbb{R}^{3\times 2}} \mathrm{d}^3\mathbf{p}_1 \, \mathrm{d}^3\mathbf{e}' \, \frac{|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}|}{m} \, \sigma\left(\chi, \tfrac{|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}|}{m}\right) \times$$
$$\times \Big(f(\mathbf{r}, \mathbf{p}^f, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1^f, t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t) \Big), \tag{2.2}$$

et

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}} + \mathbf{F}(r) \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}}, \tag{2.3}$$

avec $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ la force extérieure. Il ne faut pas confondre $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ dont la forme explicite n'est pas spécifiée, avec la force d'interaction entre molécules $\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{r})$.. On vérifie l'égalité des unités.

Que représente une force $\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{r}) = \mathcal{X}/||\mathbf{r}||^5$? Comme on l'a déjà mentionné, cette force est à interpréter dans l'approximation du champ moyen, donc il s'agit bien d'une force qui revêt un aspect phénoménologique. La structure de certaines molécules neutres est telle que dans un tel gaz chaque molécule ressent une force en $||\mathbf{r}||^{-5}$ sur une certaine plage de densité et de température. L'expérience permet d'établir qu'une telle force apparaît principalement pour des molécules ayant une structure spatiale relativement complexe. Par exemple, [CC] fournit à la page 232 les valeurs expérimentales d'une force en $||\mathbf{r}||^{-\nu}$ pour des températures entre 20 et $100°C$ de $\nu = 5.0$ pour l'acétylène, $\nu = 4.8$ pour le chlorure d'hydrogène, $\nu = 5.6$ pour le dioxide de carbone, $\nu = 4.9$ pour le chlore, $\nu = 4.6$ pour le dioxide de sulfure.

2.1.2 Équation de Boltzmann linéaire et unités

L'équation de Boltzmann linéaire dans l'approximation hydrodynamique (hypothèse 1.1.1) s'écrit avec l'opérateur de collision linéaire L

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} f_e(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = f_e(\mathbf{r},\mathbf{p},t) L[\Phi], \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} L[\Phi] = \int_{\mathbb{R}^{3\times 2}} \mathrm{d}^3\mathbf{p}_1 \, \mathrm{d}^3\mathbf{e}' \, \frac{|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}|}{m} \, \sigma\left(\chi, \tfrac{|\mathbf{p}_1-\mathbf{p}|}{m}\right) f_e(\mathbf{r},\mathbf{p}_1,t) \times \\ \times \Big(\Phi(\mathbf{r},\mathbf{p}_1^f,t) + \Phi(\mathbf{r},\mathbf{p}^f,t) - \Phi(\mathbf{r},\mathbf{p},t) - \Phi(\mathbf{r},\mathbf{p}_1,t) \Big) . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Cette formulation est analogue à celle de [Ce] (p. 159) ou de [Be] (Dorfman, p. 100). On peut vérifier l'égalité des unités :

$$\frac{1}{s}[f] = [f] \left(kg \frac{m}{s} \right)^3 \frac{m}{s} \frac{m^2}{\#} [f], \tag{2.6}$$

avec $[f] = \frac{\#}{m^3} \frac{s^3}{kg^3 m^3}$. À titre de comparaison, passant de l'espace de phase $\mathbf{p}$ vers $\mathbf{v}$, plus fréquemment utilisé dans la littérature, on aurait

$$f_e(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = n(\mathbf{r},t) \frac{m^3}{(2\pi m k_B T(\mathbf{r},t))^{3/2}} \exp\left(-\frac{m}{2k_B T(\mathbf{r},t)} (\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r},t))^2 \right), \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} L[\Phi] = \int_{\mathbb{R}^{3\times 2}} \mathrm{d}^3\mathbf{v}_1 \, \mathrm{d}^3\mathbf{e}' \, |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}| \, \sigma\left(\chi, |\mathbf{v}_1-\mathbf{v}|\right) f_e(\mathbf{r},\mathbf{v}_1,t) \times \\ \times \Big(\Phi(\mathbf{r},\mathbf{v}_1^f,t) + \Phi(\mathbf{r},\mathbf{v}^f,t) - \Phi(\mathbf{r},\mathbf{v},t) - \Phi(\mathbf{r},\mathbf{v}_1,t) \Big) , \end{aligned} \tag{2.8}$$

et on vérifie à nouveau que les unités sont bien correctes.

2.1.3 Adimentionalisation

Soient les changements de variables

$$\tau = \sqrt{\frac{k_B T_0}{m}} \frac{1}{\lambda_{\mathrm{mfp}}} t \tag{2.9}$$

$$\mathbf{c} = \sqrt{\frac{m}{k_B T_0}} \mathbf{v} \tag{2.10}$$

$$\mathbf{u} = \sqrt{\frac{1}{m k_B T_0}} \mathbf{p} \tag{2.11}$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda_{\mathrm{mfp}}} \mathbf{r}, \tag{2.12}$$

avec $T_0 = \langle T(\mathbf{r},t) \rangle$ une moyenne ou température de référence (par exemple la température de l'équilibre global). Introduisons le petit paramètre

$$\varepsilon = \frac{m \lambda_{\mathrm{mfp}} \frac{F_0}{m}}{k_B T_0} \ll 1 \tag{2.13}$$

qui est le rapport de l'énergie transmise à une particule de masse m par le champ d'interaction F_0 (F_0/m étant l'accélération de cette particule, voir (2.20) pour la définition de F_0) sur l'énergie thermique. L'interaction doit donc être relativement faible par rapport à l'énergie thermique. λ_{mfp} est le libre parcours moyen supposé constant, dont l'expression pour des sphères est

$$\lambda_{\mathrm{mfp}} = \frac{1}{2\pi n_0 r}, \qquad n_0 = \langle n(\mathbf{x}, \tau) \rangle, \quad r = \text{rayon de la particule.} \tag{2.14}$$

Procédant à l'adimentionalisation de l'équation de Boltzmann on obtient

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau} f_e(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau) = f_e(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau) L[\Phi]} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} L[\Phi] = \int_{\mathbb{R}^{3\times 2}} & \mathrm{d}^3\mathbf{u}_1\, \mathrm{d}^3\mathbf{e}'\, |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}| \Sigma\left(\chi, |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}|\right) f_e(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \tau) \times \\ & \times \left(\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1^f; \{\tau\}) + \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^f; \{\tau\}) - \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \{\tau\}) - \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1; \{\tau\}) \right), \end{aligned} \tag{2.16}$$

avec

$$f_e(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau) = \frac{\widetilde{n}(\mathbf{x}, \tau)}{\left(2\pi \widetilde{T}(\mathbf{x}, \tau)\right)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{c}(\mathbf{x}, \tau))^2}{\widetilde{T}(\mathbf{x}, \tau)} \right) \tag{2.17}$$

$$\Sigma\left(\chi, |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}|\right) = \lambda_{\mathrm{mfp}} n_0 \sigma \left(\chi, \sqrt{\tfrac{k_B T_0}{m}} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}| \right) \tag{2.18}$$

$$\widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{F}(x)}{F_0}, \qquad \widetilde{T}(\mathbf{x}, \tau) = \frac{T(\mathbf{x}, \tau)}{T_0}, \qquad \widetilde{n}(\mathbf{x}, \tau) = \frac{n(\mathbf{x}, \tau)}{n_0} \tag{2.19}$$

$$F_0 = |\left\langle \mathbf{F}(\mathbf{x}) \right\rangle|, \qquad T_0 = \langle T(\mathbf{x}, \tau) \rangle, \qquad n_0 = \langle n(\mathbf{x}, \tau) \rangle \tag{2.20}$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} + \varepsilon \widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}} \tag{2.21}$$

$$\cos\chi = \frac{\mathbf{u} - \mathbf{u}_1}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}_1|} \cdot \frac{\mathbf{u}^f - \mathbf{u}_1^f}{|\mathbf{u}^f - \mathbf{u}_1^f|} \tag{2.22}$$

$$\mathbf{e}' = \frac{\mathbf{u}^f - \mathbf{u}_1^f}{|\mathbf{u}^f - \mathbf{u}_1^f|} \tag{2.23}$$

$$\mathbf{u}^f = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{u} + \mathbf{u}_1 + |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| \mathbf{e}'\right) \tag{2.24}$$

$$\mathbf{u}_1^f = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{u} + \mathbf{u}_1 - |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| \mathbf{e}'\right). \tag{2.25}$$

Les seules variables qui interviennent sont donc $\mathbf{u}$ (fixée), $\mathbf{u}_1$ (intégrée) et $\mathbf{e}'$ (intégrée).

2.2 Théorie des échelles multiples de temps

La théorie des échelles multiples de temps (voir [Pi]) consiste à découper l'axe du temps aux différentes échelles de temps (ordres en ε^k auxquels correspondent un temps τ_k), ainsi qu'à découpler la physique dans ces échelles de temps décrites par τ_k en développant Φ en ordres de puissances de ε. La substitution de ces développements dans l'équation à résoudre ainsi que l'égalité des termes à chaque ordre en ε engendre une infinité d'équations. Les conditions initiales sont ensuite choisies de façon à éliminer les divergences à chaque ordre. L'application de la théorie des échelles multiples de temps

$$\tau = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{-k}\tau_k \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial\tau} = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k \frac{\partial}{\partial\tau_k} \tag{2.26}$$

$$\Phi(\mathbf{x},\mathbf{u},\tau) = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k \Phi^{(k)}(\mathbf{x},\mathbf{u};\underbrace{\tau_0,\tau_1,\tau_2,\ldots}_{=\{\tau\}}) \tag{2.27}$$

donne

$$\boxed{\begin{aligned}&\left(\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k \frac{\partial}{\partial\tau_k} + \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} + \varepsilon\widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}}\right) f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\}) \\ &\qquad = f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\})\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k L[\Phi^{(k)}],\end{aligned}} \tag{2.28}$$

avec

$$\begin{aligned}L[\Phi^{(k)}] = &\int_{\mathbb{R}^{3\times 2}} \mathrm{d}^3\mathbf{u}_1\,\mathrm{d}^3\mathbf{e}'\;|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}|\,\Sigma\left(\chi,|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}|\right) f_e(\mathbf{x},\mathbf{u}_1;\{\tau\})\times \\ &\times\Big(\Phi^{(k)}(\mathbf{x},\mathbf{u}^f;\{\tau\}) + \Phi^{(k)}(\mathbf{x},\mathbf{u}_1^f;\{\tau\}) - \Phi^{(k)}(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\}) - \Phi^{(k)}(\mathbf{x},\mathbf{u}_1;\{\tau\}\Big).\end{aligned} \tag{2.29}$$

Les équations aux différents ordres en ε sont donc

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial\tau_0} + \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\right) f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\}) &= f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\})L[\Phi], && k=0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial\tau_1} + \widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}}\right) f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\}) &= f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\})L[\Phi^{(1)}], && k=1 \\ \frac{\partial}{\partial\tau_k} f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\}) &= f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\})L[\Phi^{(k)}], && k\geq 2.\end{aligned} \tag{2.30}$$

Ces équations dégagent l'existence de 3 régimes. On dit que pour les temps courts $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$, la dynamique est essentiellement balistique. À l'ordre suivant $\mathcal{O}(\varepsilon^1)$, il y a propagation (seul ordre où apparaît la force de façon explicite), tandis que pour des temps longs $\mathcal{O}(\varepsilon^k)$, $k\geq 2$, la dynamique est diffusive.

Chapitre 3

Éléments de théorie spectrale du gaz de Maxwell

Rappelons qu'il s'agit d'une théorie linéaire, c'est-à-dire que nous étudions l'opérateur de collision linéaire L. Cette section expose quelques résultats sur le spectre de l'opérateur de collision linéaire, résultats utiles par la suite.

3.1 Expression spectrale de la solution

Les équations à résoudre sont celles données par (2.30). En général, l'opérateur de gauche de ces équations a toujours comme fonction propre $f_e(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \{\tau\})$, donc on est dans tous les cas amené à résoudre une équation de la forme

$$G^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \{\tau\}) = L[\Phi^{(k)}]. \tag{3.1}$$

Dans le cas d'un gaz de Maxwell pour lequel

$$|\mathbf{F}_{\mathrm{int}}(\mathbf{x})| = \frac{\mathcal{X}}{||\mathbf{x}||^5}, \tag{3.2}$$

le spectre de L est discret et les fonctions propres ψ_i et valeurs propres λ_i (i est un multi-indice) de l'opérateur de collision linéaire L sont connues, et forment une base de $L^2(\mathbb{R}^3, \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}^3\mathbf{x})$. Ainsi on décompose $\Phi^{(k)}$ dans cette base

$$\Phi^{(k)} = \sum_{i \geq 1} c_i^{(k)} \psi_i. \tag{3.3}$$

L'équation intégrale de Boltzmann se réduit donc à

$$G^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \{\tau\}) = \sum_{i \geq 1} c_i^{(k)} L[\psi_i] = \sum_{i \geq 1} c_i^{(k)} \lambda_i \psi_i, \tag{3.4}$$

d'où

$$\big\langle \psi_j \big| G^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \{\tau\}) \big\rangle = \sum_{i \geq 1} c_i^{(k)} \lambda_i \underbrace{\langle \psi_j | \psi_i \rangle}_{=\delta_{ij}} = c_j^{(k)} \lambda_j. \tag{3.5}$$

Ainsi, pour tout vecteur propre ψ_i qui n'est pas dans le noyau de L, le coefficient est donné par

$$c_i^{(k)} = \frac{1}{\lambda_i} \big\langle \psi_i \big| G^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \{\tau\}) \big\rangle. \tag{3.6}$$

Il existe 5 invariants de collision pour lesquels la valeur propre est nulle :

$$\begin{aligned} L\psi_i &= \lambda_i \psi_i && (3.7)\\ \lambda_i &= 0, \qquad \forall\, i = 1, \dots, 5, && (3.8)\end{aligned}$$

les autres valeurs propres étant strictement négatives $\lambda_i < 0$. La solution finale peut donc être décomposée dans la base des vecteurs propres $\{\psi_i\}_{i\geq 1}$ de L de la façon suivante

$$\Phi^{(k)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{5} c_i^{(k)} \psi_i}_{\substack{= \Phi^{(k)}_{ker} \in \ker(L) \\ :\ \text{invariants de collision}}} + \underbrace{\sum_{i\geq 6} c_i^{(k)} \psi_i}_{= \Phi^{(k)}_{im} \in \mathrm{Im}(L)} \quad . \qquad (3.9)$$

Lemme 3.1.1 *Les coefficients $\{c_i^{(k)}\}_{i=1}^5$ correspondants aux fonctions propres du noyau de L, c'est-à-dire de valeur propre nulle (les 5 invariants de collision) peuvent être posés égaux à zéro car ces termes ne contribuent pas aux coefficients de transport, c'est-à-dire $\Phi^{(k)}_{ker} = 0\ \forall\, k \geq 0$.*

Preuve (Lemme 3.1.1) Nous proposons deux preuves. La première, qui est une simple argumentation par l'absurde, permet de vérifier rapidement et intuitivement l'exactitude du lemme. La seconde est plus formelle.

- Par l'absurde : supposons que $\{c_i\}_{i=1}^5 \neq 0$. On aura alors

$$L[\Phi^{(k)}] = \sum_{i=1}^{5} c_i^{(k)} \underbrace{L[\psi_i]}_{=0} + \sum_{i\geq 6} c_i^{(k)} L[\psi_i] = \sum_{i\geq 6} c_i^{(k)} L[\psi_i], \qquad (3.10)$$

  et donc quelque soit la valeur de $\{c_i^{(k)}\}_{i=1}^5$, la même équation de Boltzmann sera satisfaite. Ainsi, ces coefficients peuvent être choisis arbitrairement. Par conséquent, l'expression des coefficients de transport sera arbitraire car dépendante de $\{c_i^{(k)}\}_{i=1}^5$, ce qui est absurde. En conséquence, il faut que $\{c_i^{(k)}\}_{i=1}^5 = 0\ \forall\, k \geq 0$.
- Écrivons $\Phi^{(k)} = \Phi^{(k)}_{ker} + \Phi^{(k)}_{im}$, avec $\Phi^{(k)}_{ker} \in \ker(L)$ et $\Phi^{(k)}_{im} \in \mathrm{Im}(L)$. On a donc $L[\Phi^{(k)}_{ker}] = 0$, ce qui implique que l'intégrand de L est nul (car c'est l'équation de Boltzmann à l'équilibre), ce qui signifie que

$$\Phi^{(k)}_{ker}(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \{\tau\}) + \Phi^{(k)}_{ker}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1; \{\tau\}) = \Phi^{(k)}_{ker}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1^f; \{\tau\}) + \Phi^{(k)}_{ker}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^f; \{\tau\}), \qquad (3.11)$$

  ce qui impose que $\Phi^{(k)}_{ker}$ est un invariant de collision, donc une combinaison linéaire de $\{1,\, \mathbf{p},\, \mathbf{p}^2\}$. De plus on impose que les grandeurs d'équilibre soient données par la distribution d'équilibre local f_e, ce qui donne une contrainte supplémentaire sur $\Phi^{(k)}_{ker}$, découlant de (1.11)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{p}\ \chi_i(\mathbf{p}) f_e(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \Phi^{(k)}_{ker}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) &= 0, \qquad \forall\, i = 1, \dots, 5 && (3.12)\\ \chi_i(\mathbf{p}) &= \{1,\, p_1,\, p_2,\, p_3,\, \mathbf{p}^2\}. && (3.13)\end{aligned}$$

  On a donc $\Phi^{(k)}_{ker} = A\{1,\, \mathbf{p},\, \mathbf{p}^2\}$ qui doit satisfaire (3.12), avec $A \in \mathbb{R}$ une constante de normalisation. Supposons d'abord que $\Phi^{(k)}_{ker} = 1$, alors par symétrie sphérique de f_e, lorsque $\chi = \left\{1, \mathbf{p}^2\right\}$ l'équation (3.12) ne peut pas être vérifiée. Il en est de même lorsque $\Phi_{ker}^{(k)} = \mathbf{p}^2$. Lorsque $\Phi_{ker}^{(k)} = \mathbf{p}$, alors si $\chi = \mathbf{p}$, (3.12) n'est pas satisfaite. Par conséquent, il faut que $\Phi_{ker}^{(k)} = 0 \ \forall\ k$, d'où $\{c_i^{(k)}\}_{i=1}^5 = 0$, ce qui achève la preuve.

■

Utilisant ce résultat, la solution de $G^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \{\tau\}) = L[\Phi^{(k)}]$ s'écrit finalement avec (3.6) et (3.9)

$$\boxed{\Phi^{(k)} = \sum_{\{i|\lambda_i \neq 0\}} \frac{\left\langle \psi_i \middle| G^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \{\tau\}) \right\rangle}{\lambda_i} \psi_i.} \tag{3.14}$$

Si l'interaction n'est pas de Maxwell, alors il est toujours possible de résoudre le problème par décomposition sur les fonctions propres du gaz de Maxwell (voir [CC]).

3.2 Fonctions et valeurs propres de l'opérateur de collision linéaire

Pour des molécules maxwelliennes, le spectre est discret et les fonctions propres de l'équation aux valeurs propres

$$L\psi_{nlm} = \lambda_{nl}\psi_{nlm}, \qquad n \geq 0, \quad l \geq 0, \quad m \in [-l, +l] \tag{3.15}$$

sont

$$\boxed{\psi_{nlm}(|\mathbf{u}-\mathbf{c}|) = \sqrt{\frac{2n!}{\Gamma(l+n+1)}} |\mathbf{u}-\mathbf{c}|^l S_{l+1/2}^{(n)}\left((\mathbf{u}-\mathbf{c})^2\right) Y_l^m\left(\widehat{\mathbf{u}-\mathbf{c}}\right)} \tag{3.16}$$

avec

$$S_l^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k \frac{(n+l)!}{(l+k)!(n-k)!k!} \tag{3.17}$$

les *polynômes de Sonine* qui vérifient

$$\left\langle S_l^{(n)} \middle| S_l^{(n')} \right\rangle_{L^2([0,\infty[,\, x^l \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x)} = \frac{\Gamma(l+n+1)}{n!} \delta_{nn'}, \tag{3.18}$$

avec $\langle f|g \rangle = \int_\Omega \mathrm{d}\mu\ f^* g$ et Y_l^m les harmoniques sphériques, $\mathrm{d}\mu$ étant la mesure sur l'espace L^2 correspondant. On utilisera souvent dans la suite les expressions valables $\forall\ l$

$$S_l^{(0)}(x) = 1 \tag{3.19}$$

$$S_l^{(1)}(x) = l+1-x \tag{3.20}$$

$$S_l^{(2)}(x) = \tfrac{1}{2}(l+1)(l+2) - (l+2)\,x + \tfrac{1}{2}\,x^2, \tag{3.21}$$

ainsi que

$$\Gamma(n+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(2n-1)!!. \tag{3.22}$$

On a donc la relation d'orthonormalité des fonctions propres

$$\langle \psi_{nlm} | \psi_{n'l'm'} \rangle_{L^2\left(\mathbb{R}^3,\, \mathrm{e}^{-\mathbf{x}^2} \mathrm{d}^3\mathbf{x}\right)} = \delta_{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{3.23}$$

On vérifie facilement l'orthonormalité (3.23) avec (3.16) à l'aide de (pour $\Re(\alpha) > 0$)

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, x^n\, \mathrm{e}^{-\alpha x^2} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha^{\frac{n+1}{2}}} \frac{(n-1)!!}{2^{\frac{n}{2}}} \sqrt{\pi}, & n \text{ pair} \\ 0, & n \text{ impair}. \end{cases} \tag{3.24}$$

La dégénérescence des fonctions propres est de $2l+1\ \forall\, l$ (engendrée par le nouvel indice m, dû à l'invariance par rotation). Les invariants de collision sont données par les indices

$$\lambda_{nlm} = 0 \iff \begin{cases} n = 0,\ l = 0,\ m = 0 \\ n = 0,\ l = 1,\ m = -1,\ 0,\ 1 \\ n = 1,\ l = 0,\ m = 0, \end{cases} \tag{3.25}$$

et le comportement asymptotique des autres valeurs propres est

$$\lambda_{nl} \overset{n\to\infty}{\asymp} -n^{1/4} \to -\infty. \tag{3.26}$$

Par (3.14), il suffit donc de calculer les premiers coefficients en n pour avoir une bonne approximation de la solution.

Il existe une relation (essentiellement une normalisation) entre les polynômes de Sonine $S_{l+1/2}^{(n)}$ et de Laguerre $L_n^{l+1/2}$, en général plus fréquemment utilisés dans la littérature, qui est

$$L_n^{l+1/2} = \sqrt{\frac{\Gamma(n+l+3/2)}{\Gamma(n+l+1)}} S_{l+1/2}^{(n)}, \tag{3.27}$$

par conséquent la base $\{\psi_{nlm}\}$ dans les polynômes de Laguerre est

$$\boxed{\psi_{nlm}(|\mathbf{u}-\mathbf{c}|) = \sqrt{\frac{2n!}{\Gamma(n+l+3/2)}} |\mathbf{u}-\mathbf{c}|^l L_n^{l+1/2}\left((\mathbf{u}-\mathbf{c})^2\right) Y_l^m\left(\widehat{\mathbf{u}-\mathbf{c}}\right),} \tag{3.28}$$

avec

$$L_n^l(x) = (-1)^n \sqrt{\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+l+1)}}\, \mathrm{e}^x x^{-l} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^n}\left(\mathrm{e}^{-x} x^{n+l}\right), \tag{3.29}$$

et

$$\left\langle L_n^l | L_{n'}^l \right\rangle_{L^2([0,\infty[,\, x^l \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x)} = \delta_{nn'}. \tag{3.30}$$

À nouveau, on vérifie facilement l'orthonormalité dans $L^2(\mathbb{R}^3, \mathrm{e}^{-\mathbf{x}^2}\mathrm{d}^3\mathbf{x})$ des ψ_{nlm} ainsi définies.

Le calcul des valeurs propres nécessite le recours à des formules de quadrature. Les valeurs propres (non adimentionalisées) correspondantes aux fonctions propres exprimées à l'aide des polynômes de Laguerre sont données par (voir [Ce] p. 182)

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_{nl} = \frac{2\pi\rho_0}{m} \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\, \Big\{ & P_l(\sin\theta)(\sin\theta)^{2n+1}\left(\beta(\theta) + \beta(\pi/2-\theta)\right) \\ & -(\delta_{n0}\delta_{l0}+1)\beta(\theta)\Big\}, \end{aligned}} \tag{3.31}$$

avec P_l le polynôme de Legendre d'ordre l, ρ_0 la distance de plus proche approche qui satisfait à l'équation (voir [Ce] p. 70, avec $\mu = m/2$ la masse réduite, k défini par le potentiel $U = k/r^4$ tel que la force soit $F = 4k/r^5 = \mathcal{X}/r^5$), avec

$$mV^2\left(1 - \frac{r^2}{\rho_0^2}\right) - \frac{1}{(2\mathcal{X}\rho_0)^2} = 0, \tag{3.32}$$

avec $V = \sqrt{\frac{k_B T_0}{m}}||\mathbf{u} - \mathbf{c}||$. Finalement

$$\beta(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{X}m}} b(\theta) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} b(\theta), \tag{3.33}$$

avec $b(\theta)$ donné par $\theta(b) = \int_0^{x_0} \mathrm{d}x \, \left(1 - x^2 - (x/b)^4\right)^{-1/2}$ et x_0 solution de $1 - x_0^2 - (x_0/b)^4 = 0$. Le rapport de ces valeurs propres est donné par [Ce] à la page 184.

Chapitre 4

Modèle homogène : équilibre global

Supposons réalisé l'équilibre global, alors $\mathbf{c}(\mathbf{x}, \{\tau\}) = \mathbf{c}$, $n(\mathbf{x}, \{\tau\}) = n_0$, $T(\mathbf{x}, \{\tau\}) = T_0$, donc

$$f_e(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \{\tau\}) = f_e(\mathbf{u}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{c})^2\right). \tag{4.1}$$

4.1 Établissement des équations

Comme f_e ne dépend plus que du champ de vitesse, alors l'équation (2.28) devient

$$\boxed{\varepsilon \widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{c}) = -\sum_{k \geq 0} \varepsilon^k L[\Phi^{(k)}],} \tag{4.2}$$

avec

$$L[\Phi^{(k)}] = \int_{\mathbb{R}^{3\times 2}} \mathrm{d}^3\mathbf{u}_1 \, \mathrm{d}^3\mathbf{e}' \; |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}| \Sigma\left(\chi, |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}|\right) f_e(\mathbf{u}_1) \times$$
$$\times \Big(\Phi^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1^f; \{\tau\}) + \Phi^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^f; \{\tau\}) - \Phi^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \{\tau\}) - \Phi^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1; \{\tau\}) \Big). \tag{4.3}$$

4.1.1 Ordre ε^0

$$L[\Phi^{(0)}] = 0, \tag{4.4}$$

et donc $\Phi^{(0)} \in \ker(L)$, et par le lemme 3.1.1

$$\boxed{\Phi^{(0)} = 0.} \tag{4.5}$$

4.1.2 Ordre ε^1

$$\widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{c}) = -L[\Phi^{(1)}] \tag{4.6}$$

Ce qui est une équation intégrale pour $\Phi^{(1)}$. C'est *le seul ordre de grandeur où apparaît la force.* Comme le membre de gauche ne dépend de $\mathbf{x}$ que par la fonction $\widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$, et qu'il est indépendant des $\{\tau\}$, alors les variables $\{\tau\}$ et $\mathbf{u}$ sont découplées et on peut essayer une forme d'essai du type $\Phi^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \{\tau\}) = \widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) B(\{\tau\}) \cdot \phi^{(1)}(\mathbf{u} - \mathbf{c})$. Or, comme le membre de gauche est indépendant des $\{\tau\}$, on a $B = \text{constante}|_{\{\tau\}}$, et donc

$$\Phi^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \{\tau\}) = \widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) \cdot \phi^{(1)}(\mathbf{u} - \mathbf{c}), \tag{4.7}$$

de sorte que l'équation à résoudre est

$$\boxed{\mathbf{u} - \mathbf{c} = -L[\phi^{(1)}].} \tag{4.8}$$

4.1.3 Ordre ε^k, $k \geq 2$

$$0 = L[\Phi^{(k)}] \tag{4.9}$$

L'équation étant la même qu'à l'ordre ε^0, on a alors

$$\boxed{\Phi^{(k)} = 0.} \tag{4.10}$$

4.1.4 Interprétations

Il ne reste donc que l'équation intégrale à l'ordre $k = 1$ à résoudre. Cette équation peut être résolue avec une interaction entre molécules de Maxwell, et donc le problème est dans ce cas totalement soluble. Comme l'équation est la même pour tout $k \neq 1$, alors la solution finale s'écrit, en posant $\Phi^{(k)} = \phi \; \forall k \neq 1$

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \varepsilon \widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) \cdot \phi^{(1)}(\mathbf{u} - \mathbf{c}) + \phi(\mathbf{u} - \mathbf{c}) \sum_{k \neq 1} \varepsilon^k. \tag{4.11}$$

Comme $\phi = 0$ il ne reste donc que le terme d'ordre $k = 1$. Néanmoins, pour éviter une indétermination du type $0 \cdot \infty$ et donc pour que la solution converge, il faut que $\varepsilon < 1$, c'est-à-dire par définition du petit paramètre, que l'énergie thermique $k_B T$ soit supérieure à l'énergie due au champ de force d'interaction $m \lambda_{\text{mfp}} F_0 / m$. Une telle interprétation est bien conforme à ce à quoi on pouvait s'attendre : l'existence même de notre solution *doit montrer une dépendance claire dans l'hypothèse d'existence d'un petit paramètre*. Sous cette hypothèse, la solution finale s'écrit donc

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \varepsilon \widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) \cdot \phi^{(1)}(\mathbf{u} - \mathbf{c}).} \tag{4.12}$$

On voit donc que le coefficient de viscosité sera dû aux effets à l'échelle $k = 1$ uniquement, et donc uniquement à l'échelle propagative, ce qui est surprenant car n'apparaissent ni les phénomènes balistiques ni diffusifs. Cependant, l'application de la théorie des échelles de temps multiples à ce modèle où on fait l'hypothèse d'équilibre global des grandeurs, qui ne dépendent donc pas du temps, n'est peut-être pas appropriée car on applique une théorie basée sur le temps à un modèle indépendant du temps. On verra néanmoins dans les sections 4.3 et 4.4 qu'il n'y a aucune ambiguïté à ce sujet.

4.2 Résolution des équations

Connaissant les fonctions propres et valeurs propres, il suffit de calculer les coefficients (intégrales) définissant avec (3.9) et (4.8) pour obtenir

$$\Phi(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \varepsilon\widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) \cdot \sum_{\{n,l,m|\lambda_{nl}\neq 0\}} \frac{\langle\psi_{nlm}(|\mathbf{y}|)|\mathbf{y}\rangle}{-\lambda_{nl}} \psi_{nlm}(|\mathbf{u}-\mathbf{c}|). \tag{4.13}$$

Néanmoins, nous ne connaissons actuellement que le rapport de ces valeurs propres (il y a la dépendance dans le "cut-off" ρ_0).

On remarque que Φ dépend du champ inconnu $\mathbf{c}(\mathbf{x},\{\tau\})$. Cette dépendance disparaît lors de l'intégration dans l'expression des coefficients de transport microscopiques (1.22) et (1.23).

Cette méthode spectrale n'est pas la plus appropriée. En procédant comme dans la section 5.5.1, on peut trouver quels sont les coefficients non nuls dans (4.13). Ainsi, posant $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{c}$ on doit résoudre $L[\phi^{(1)}] = -\mathbf{w}$, et on pose

$$\phi^{(1)}(\mathbf{w}) = A^{(1)}(\mathbf{w})\mathbf{w} \tag{4.14}$$

de sorte que l'équation à résoudre soit maintenant

$$L[A^{(1)}(\mathbf{w})\mathbf{w}] = -\mathbf{w}. \tag{4.15}$$

Par les mêmes arguments que ceux de la section 5.5.1 on a

$$A^{(1)}(\mathbf{w}) = a_0 S^{(0)}_{3/2}\left(\frac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right), \qquad a_0 \in \mathbb{R}, \tag{4.16}$$

donc

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \varepsilon\widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) \cdot a_0 S^{(0)}_{3/2}\left(\frac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right)\mathbf{w}.} \tag{4.17}$$

4.3 Coefficient de conductivité thermique

Étant donné que dans la solution obtenue seul a_0 est non nul (c'est-à-dire que les autres coefficients du développement de la solution sur les fonctions propres de l'opérateur de collision linéaire sont nuls), alors le calcul est en tout point similaire à celui de la section 5.5.2 et on trouve un coefficient de conductivité thermique nul

$$\boxed{\lambda = 0.} \tag{4.18}$$

Ce résultat s'interprète comme suit. Étant donné que le modèle homogène, par définition n'admet ni fluctuations ni courants, alors le coefficient de conductivité thermique doit être nul car il est justement engendré par les courants.

4.4 Coefficient de viscosité

Les arguments sont en tous points similaires à ceux de la section 5.5.2, et amènent à la nullité du coefficient de viscosité de cisaillement

$$\boxed{\eta = 0.} \tag{4.19}$$

L'interprétation est la même que pour le coefficient de conductivité thermique.

Chapitre 5

Modèle inhomogène : équilibre local

Le modèle similaire sans théorie des échelles multiples a été étudié dans [Ba], [Be], [Ce], [Kr] et [BCH].

Ce cas est plus compliqué que le modèle homogène dans le sens où $f_e(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \{\tau\})$ dépend de $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, $\{\tau\}$ au-travers des 5 grandeurs $n(\mathbf{x}, \{\tau\})$, $\mathbf{c}(\mathbf{x}, \{\tau\})$, $T(\mathbf{x}, \{\tau\})$ définissant l'équilibre local.

5.1 Établissement des équations

Les inhomogénéités se traduisent par

$$\frac{\partial}{\partial \tau_k} f_e(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \{\tau\}) = \frac{\partial f_e}{\partial \widetilde{n}} \frac{\partial \widetilde{n}}{\partial \tau_k} + \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{c}} f_e \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \tau_k} + \frac{\partial f_e}{\partial \widetilde{T}} \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \tau_k}, \tag{5.1}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f_e(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \{\tau\}) = \frac{\partial f_e}{\partial \widetilde{n}} \frac{\partial \widetilde{n}}{\partial x_k} + \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{c}} f_e \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_e}{\partial \widetilde{T}} \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_k}. \tag{5.2}$$

En insérant (5.1) dans (2.28) on est amené à résoudre l'équation

$$\sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \left(\underbrace{\frac{\partial \widetilde{n}}{\partial \tau_k}}_{①} \underbrace{\frac{\partial f_e}{\partial \widetilde{n}}}_{②} + \underbrace{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{c}} f_e}_{③} \cdot \underbrace{\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \tau_k}}_{④} + \underbrace{\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \tau_k}}_{⑤} \underbrace{\frac{\partial f_e}{\partial \widetilde{T}}}_{⑥} \right) + \underbrace{\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} f_e}_{⑦} + \underbrace{\varepsilon \widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}} f_e}_{⑧}$$
$$= f_e(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \{\tau\}) \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k L[\Phi^{(k)}]. \tag{5.3}$$

Pour calculer ①, ④ et ⑤ il est nécessaire d'exploiter les relations de conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie. Pour obtenir ces relations de conservation, on sait que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{p} \; \chi_i(\mathbf{p}) \, \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = 0 \tag{5.4}$$

pour tout invariant de collision $\chi_i(\mathbf{p}) = \{1, \mathbf{p}, \mathbf{p}^2\}$. En procédant à l'adimentionalisation appropriée et en calculant (5.4) avec les invariants de collision successifs on obtient les lois de conservation cherchées.

① Loi de conservation de la masse $\chi = 1$:

$$\frac{\partial \widetilde{n}}{\partial \tau_k} = -\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} \left(\widetilde{n}\mathbf{c}\right). \tag{5.5}$$

④ Loi de conservation de l'impulsion $\chi = \mathbf{p}$:

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \tau_k} = \frac{1}{\widetilde{n}} \left(-\widetilde{n}(\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}})\mathbf{c} + \varepsilon \widetilde{n}\widetilde{\mathbf{F}} - \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\big(\widetilde{n}\widetilde{T}\big) \right). \tag{5.6}$$

⑤ Loi de conservation de l'énergie $\chi = \mathbf{p}^2$:

$$\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \tau_k} = -\frac{2}{3}\widetilde{T}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\mathbf{c} - \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{T}. \tag{5.7}$$

Pour ces trois relations, on remarque que l'on a fait l'hypothèse supplémentaire que *les lois de conservation restent valables pour toute échelle de temps indépendamment des autres échelles.* Cette hypothèse se traduit mathématiquement par la présence de l'indice k attaché au temps adimentionalisé τ dans les dérivées. Pour illustrer la conséquence de l'hypothèse en question, prenons par exemple la loi de conservation de la masse qui est

$$\frac{\partial \widetilde{n}}{\partial \tau} = -\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} \left(\widetilde{n}\mathbf{c}\right). \tag{5.8}$$

L'application de la théorie des échelles multiples de temps consistant à discrétiser l'échelle temporelle aurait alors donné

$$\sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \frac{\partial \widetilde{n}}{\partial \tau_k} = -\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} \left(\widetilde{n}\mathbf{c}\right), \tag{5.9}$$

ce qui signifie que les grandeurs en question sont conservées uniquement en considérant tous les ordres de temps, et qu'elles pourraient éventuellement être violées à certaines échelles. La physique permet alors d'introduire raisonnablement l'affirmation que ces grandeurs doivent être conservées à toute échelle de temps, d'où (5.5).

Le calcul de ②, ③, ⑥, ⑦ et ⑧ se fait directement avec l'expression (2.17) de la fonction de distribution d'équilibre $f_e(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \{\tau\})$.

②

$$\frac{\partial f_e}{\partial \widetilde{n}} = \frac{1}{\widetilde{n}} f_e \tag{5.10}$$

③

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{c}} f_e = \frac{1}{\widetilde{T}} \left(\mathbf{u} - \mathbf{c}\right) f_e \tag{5.11}$$

⑥

$$\frac{\partial f_e}{\partial \widetilde{T}} = \frac{1}{\widetilde{T}} f_e \left(-\frac{3}{2} + \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{c})^2}{2\widetilde{T}} \right) \tag{5.12}$$

(7)

$$\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}f_e = f_e\Bigg(\mathbf{u}\cdot\frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{n}}{\widetilde{n}} + \mathbf{u}\cdot\frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{T}}{\widetilde{T}}\left(\frac{(\mathbf{u}-\mathbf{c})^2}{2\widetilde{T}} - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{\widetilde{\widetilde{T}}}\sum_{i,j=1}^{3} u_i(\mathbf{u}-\mathbf{c})_j\frac{\partial c_j}{\partial x_i}\Bigg) \tag{5.13}$$

(8)

$$\varepsilon\widetilde{\mathbf{F}}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}}f_e = -\varepsilon\widetilde{\mathbf{F}}\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{c})\frac{1}{\widetilde{\widetilde{T}}}f_e. \tag{5.14}$$

En insérant les relations (1) à (8) dans (5.3) et en utilisant les identités

$$\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{u}-\mathbf{c})_i^2\frac{\partial c_i}{\partial x_i} \;=\; (\mathbf{u}-\mathbf{c})^2\mathbb{1} : \boldsymbol{D} \tag{5.15}$$

ainsi que

$$\sum_{i,j=1}^{3} u_i(\mathbf{u}-\mathbf{c})_i\frac{\partial c_j}{\partial x_i} - (\mathbf{u}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{c}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}})\,\mathbf{c} \;=\; (\mathbf{u}-\mathbf{c})(\mathbf{u}-\mathbf{c}) : \boldsymbol{D}, \tag{5.16}$$

on obtient après quelques calculs

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\Bigg\{&(1-\delta_{k,0})\mathbf{u}\cdot\frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{n}}{\widetilde{n}}\\ &+\frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{T}}{\widetilde{T}}\left[\left(\frac{(\mathbf{u}-\mathbf{c})^2}{2\widetilde{T}}-\frac{5}{2}\right)(\mathbf{u}-\mathbf{c}) + (\delta_{k,0}-1)\left(\frac{(\mathbf{u}-\mathbf{c})^2}{2\widetilde{T}}-\frac{3}{2}\right)\mathbf{u}\right]\\ &+\frac{1}{\widetilde{\widetilde{T}}}\cdot\Bigg[\left((\mathbf{u}-\mathbf{c})(\mathbf{u}-\mathbf{c}) - \frac{(\mathbf{u}-\mathbf{c})^2}{3}\mathbb{1}\right) : \boldsymbol{D}\\ &+(\delta_{k,0}-1)\Bigg(\sum_{i,j=1}^{3}u_i(\mathbf{u}-\mathbf{c})_j\frac{\partial c_j}{\partial x_i} - \varepsilon(\mathbf{u}-\mathbf{c})\widetilde{\mathbf{F}}\Bigg)\Bigg]\Bigg\}\\ &= \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k L[\Phi^{(k)}],\end{aligned} \tag{5.17}$$

où $(\mathbf{u}-\mathbf{c})(\mathbf{u}-\mathbf{c})$ est une matrice réelle 3×3 d'éléments $(\mathbf{u}-\mathbf{c})_i(\mathbf{u}-\mathbf{c})_j$, $\boldsymbol{D}$ le tenseur des contraintes adimentionalisé d'éléments $D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_i}{\partial x_j} + \frac{\partial c_j}{\partial x_i}\right)$, et si $\boldsymbol{\mathcal{A}} \in M_n(\mathbb{K})$ et $\boldsymbol{\mathcal{B}} \in M_n(\mathbb{K})$ alors $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{B}} = \sum_{i,j=1}^{n}\mathcal{A}_{ij}\mathcal{B}_{ji}$.

Écrivant

$$\Phi^{(k)} = \begin{cases}\Phi^{(0)}, & k=0\\ \Phi^{(0)}+\Psi^{(1)}, & k=1\\ \Phi^{(0)}+\Psi^{(1)}+\Psi^{(2)}, & k\geq 2,\end{cases} \tag{5.18}$$

alors l'égalité des ordres en ε de (5.17) engendre :

$$\boxed{\begin{array}{ll}
\mathcal{O}(\varepsilon^0): & \dfrac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{T}}{\widetilde{T}} \cdot \left(\dfrac{(\mathbf{u}-\mathbf{c})^2}{2\widetilde{T}} - \dfrac{5}{2}\right)(\mathbf{u}-\mathbf{c}) \\
& \qquad + \dfrac{1}{\widetilde{\widetilde{T}}}\left((\mathbf{u}-\mathbf{c})(\mathbf{u}-\mathbf{c}) - \dfrac{(\mathbf{u}-\mathbf{c})^2}{3}\mathbb{1}\right) : \boldsymbol{D} \;=\; L[\Phi^{(0)}] \\
& \text{Solution : } \Phi^{(0)} \\
\mathcal{O}(\varepsilon^1): & \mathbf{u}\cdot\dfrac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{n}}{\widetilde{n}} - \dfrac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{T}}{\widetilde{T}}\left(\dfrac{(\mathbf{u}-\mathbf{c})^2}{2\widetilde{T}} - \dfrac{3}{2}\right)\mathbf{u} \\
& \qquad - \dfrac{1}{\widetilde{\widetilde{T}}}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} u_i(\mathbf{u}-\mathbf{c})_j\dfrac{\partial c_j}{\partial x_i} \;=\; L[\Psi^{(1)}] \\
& \text{Solution : } \Phi^{(1)} = \Phi^{(0)} + \Psi^{(1)} \\
\mathcal{O}(\varepsilon^2): & \dfrac{1}{\widetilde{\widetilde{T}}}(\mathbf{u}-\mathbf{c})\cdot\widetilde{\mathbf{F}} \;=\; L[\Psi^{(2)}] \\
& \text{Solution : } \Phi^{(2)} = \Phi^{(0)} + \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)}.
\end{array}} \tag{5.19}$$

5.2 Commentaires

La première équation de (5.19) est celle obtenue à l'ordre ε^0, la seconde à l'ordre ε^1 et la dernière à l'ordre ε^k $\forall\, k \geq 2$. On voit donc à nouveau apparaître 3 échelles de temps, qui sont l'échelle balistique $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$, propagative $\mathcal{O}(\varepsilon^1)$ et diffusive $\mathcal{O}(\varepsilon^k)$, $k \geq 2$.

On remarque que l'équation à l'ordre ε^0 est exactement la même que celle obtenue sans la théorie des échelles de temps (voir [Be], [CC], [Kr]). Par conséquent, la solution $\Phi^{(0)}$ est connue, et (5.18) se révèle donc être un développement autour de la théorie connue. Ainsi, les coefficients de transport calculés dans les ouvrages de références correspondent à l'échelle de temps balistique.

On remarque aussi que la force $\widetilde{\mathbf{F}}$ apparaît uniquement dans les ordres ε^k, $k \geq 2$, alors que dans le cas homogène elle apparaissait pour ε^1. En effet, l'application de la théorie des échelles multiples de temps avec la discrétisation *temporelle* élimine ce terme à l'ordre ε^1 et l'ajoute aux ordres suivants. Ce terme n'est pas annulé dans le cas homogène car la dérivée temporelle s'annule alors par indépendance temporelle de la fonction de distribution d'équilibre local f_e. L'équation à l'ordre $k \geq 2$ du modèle inhomogène est la même que celle du modèle homogène à l'ordre $k = 1$ en posant $\widetilde{\mathbf{F}} \doteqdot \widetilde{\mathbf{F}}/\widetilde{T}$, d'où la solution donnée par (4.17)

$$\Psi^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \{\tau\}) \;=\; \frac{\widetilde{F}(\mathbf{x})}{\widetilde{\widetilde{T}}(\mathbf{x}, \tau)}\, a_0\, S^{(0)}_{3/2}\left(\frac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right)\mathbf{w}. \tag{5.20}$$

Ainsi, à une renormalisation près (qui dépend de la température) de la force, on obtient le modèle homogène à l'échelle propagative (en fait, cette solution ne contribue pas aux coefficients de transport). Comme $\frac{\widetilde{\mathbf{F}}}{\widetilde{\widetilde{T}}}$ est de l'ordre du rapport de l'énergie due au champ de force par l'énergie thermique, c'est-à-dire de l'ordre du petit paramètre, alors si la température augmente $\Psi^{(2)}$ tend vers zéro, c'est-à-dire que la solution $\Phi^{(2)}$ tend vers $\Phi^{(1)}$. On en conclut ainsi (ce qui se voit immédiatement à partir de la solution générale (5.21)) que plus le petit paramètre diminue (c'est-à-dire plus l'énergie thermique est grande vis-à-vis de celle du champ de force), plus les solutions aux échelles diffusives et propagatives se rapprochent de celle de l'échelle balistique $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$. Ceci ne semble à priori pas cohérent car si l'énergie thermique devient grande, il faudrait plutôt que le comportement diffusif domine.

L'explication est la suivante, et réside dans la construction même de notre modèle. En effet, par définition du petit paramètre ε qui est le rapport de l'énergie du champ de force sur l'énergie thermique, ε tend vers zéro si la température augmente. Par conséquent, étant donné que nous construisons une théorie perturbative en ε, lorsque la température tend vers l'infini, donc $\varepsilon \to 0$, on doit retrouver les résultats de l'ordre le plus bas (voir (5.21)), soit ε^0, ce qui est bien le comportement observé.

Avec le développement (5.18), la solution finale pour la fonction de distribution f dans l'approximation hydrodynamique s'écrit

$$f = f_e\left(1+\sum_{k\geq 0}\Phi^{(k)}\right) \overset{(5.18)}{=} f_e\left(1+\frac{1}{1-\varepsilon}\left(\Phi^{(0)}+\varepsilon\Psi^{(1)}+\varepsilon^2\Psi^{(2)}\right)\right). \quad (5.21)$$

À nouveau, la solution existe si $\varepsilon < 1$ (critère de convergence d'uns somme géométrique établissant (5.21)), c'est-à-dire si l'énergie thermique est supérieure à l'énergie due au champ de force $\mathbf{F}$. Cette solution montre aussi que plus les fluctuations thermiques sont grandes vis-à-vis de l'énergie du champ de force, plus Φ décrivant les courants diminue. Cette interprétation est bien cohérente car en présence exclusive de fluctuations thermiques, les courants doivent être nuls en moyenne.

Finalement, on constate que l'équation à l'ordre ε^1 possède des termes assez similaires à ceux de l'ordre ε^0 dont la solution est connue. Néanmoins, les différences constatées entre ces termes ont pour conséquence qu'il n'est pas possible d'exploiter les mêmes astuces de calcul que celles pour l'ordre ε^0 (voir la section 5.4).

5.3 Ordre ε^0

5.3.1 Résolution de l'équation

Il s'agit d'un calcul reproduit dans la littérature (voir [Be], [CC], [Kr]), dont la solution est connue. Il est néanmoins nécessaire d'exposer ici ces calculs, car la méthode sera exploitée lors de la résolution aux ordres ε^1 et ε^2.

L'équation à résoudre est

$$\begin{aligned}\frac{\nabla_{\mathbf{x}}\widetilde{T}}{\widetilde{T}}\cdot\left(\frac{(\mathbf{u}-\mathbf{c})^2}{2\widetilde{T}}-\frac{5}{2}\right)(\mathbf{u}-\mathbf{c})&\\ +\frac{1}{\widetilde{T}}\left((\mathbf{u}-\mathbf{c})(\mathbf{u}-\mathbf{c})-\frac{(\mathbf{u}-\mathbf{c})^2}{3}\mathbb{1}\right):\boldsymbol{D} &= L[\Phi^{(0)}].\end{aligned} \quad (5.22)$$

L étant un opérateur isotrope, une séparation de variables angulaires et radiales est possible en on obtient ainsi les fonctions propres ψ_{nlm} données par (3.16). On peut ainsi montrer en posant $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{c}$ que $\Phi^{(0)}$ est de la forme

$$\boxed{\Phi^{(0)} = A(\mathbf{w})\mathbf{w}\cdot\frac{\nabla_{\mathbf{x}}\widetilde{T}}{\widetilde{T}} + B(\mathbf{w})\frac{1}{\widetilde{T}}\left(\mathbf{w}\mathbf{w}-\frac{\mathbf{w}^2}{3}\mathbb{1}\right):\boldsymbol{D}.} \quad (5.23)$$

En insérant (5.23) dans (5.22) on obtient 2 équations permettant de déterminer $A(\mathbf{w}^2)$ et $B(\mathbf{w}^2)$:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} L[A(\mathbf{w})\mathbf{w}] & = & \left(\dfrac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}} - \dfrac{5}{2}\right)\mathbf{w} \\ L\left[B(\mathbf{w})\left(\mathbf{ww} - \frac{\mathbf{w}^2}{3}\mathbb{1}\right)\right] & = & \mathbf{ww} - \dfrac{\mathbf{w}^2}{3}\mathbb{1}. \end{array}} \tag{5.24}$$

D'autre part, on remarque que pour un gaz de Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{lcl} L\left[\psi_{11m}(x)\right] & \propto & \psi_{11m}(x) \\ \psi_{11m}(x) & \propto & S^{(1)}_{3/2}(x)x \;=\; -\left(x - \frac{5}{2}\right)x, \end{array} \right. \tag{5.25}$$

ainsi que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} L\left[\psi_{02m}(x)\right] & \propto & \psi_{02m}(x) \\ \psi_{02m}(x) & \propto & S^{(0)}_{5/2}(x)x^2 \;=\; 1\cdot x^2. \end{array} \right. \tag{5.26}$$

Pour revenir à notre problème, l'équation (5.24) pour $A(\mathbf{w})$ est

$$L\left[A(\mathbf{w})\mathbf{w}\right] = \left(\tfrac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}} - \tfrac{5}{2}\right)\mathbf{w}, \tag{5.27}$$

donc avec (5.25)

$$L\left[\psi_{11m}(x^2)\right] \overset{(5.25)}{\propto} L\left[S^{(1)}_{3/2}(x^2)x\right] \overset{(5.25)}{\propto} \left(x^2 - \tfrac{5}{2}\right)x, \tag{5.28}$$

d'où par comparaison de (5.27) et (5.28) on en conclut que la solution $A(\mathbf{w})\mathbf{w}$ est engendrée par $S^{(1)}_{3/2}\left(\frac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right)\mathbf{w}$, c'est-à-dire

$$A(\mathbf{w})\mathbf{w} \propto S^{(1)}_{3/2}\left(\tfrac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right)\mathbf{w}. \tag{5.29}$$

De même, la seconde équation de (5.24) est

$$L\left[B(\mathbf{w})\mathcal{O}(\mathbf{w}^2)\right] = \mathcal{O}(\mathbf{w}^2), \tag{5.30}$$

donc avec (5.26)

$$L\left[\psi_{02m}(x^2)\right] \overset{(5.26)}{\propto} L\left[S^{(0)}_{5/2}(x^2)x^2\right] \overset{(5.26)}{\propto} 1\cdot x^2, \tag{5.31}$$

d'où par comparaison de (5.30) et (5.31) on en conclut que la solution $B(\mathbf{w})\times$ $\times\left(\mathbf{ww} - \frac{\mathbf{w}^2}{3}\mathbb{1}\right)$ est engendrée par $S^{(0)}_{5/2}\left(\frac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right)\left(\mathbf{ww} - \frac{\mathbf{w}^2}{3}\mathbb{1}\right)$, c'est-à-dire

$$B(\mathbf{w})\left(\mathbf{ww} - \tfrac{\mathbf{w}^2}{3}\mathbb{1}\right) \propto S^{(0)}_{5/2}\left(\tfrac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right)\left(\mathbf{ww} - \tfrac{\mathbf{w}^2}{3}\mathbb{1}\right). \tag{5.32}$$

Développons $A(\mathbf{w})$ et $B(\mathbf{w})$ dans la base des fonctions propres ψ_{nlm}

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A(\mathbf{w}) & = & \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n S^{(n)}_{3/2}\left(\tfrac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right) \\ B(\mathbf{w}) & = & \displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n S^{(n)}_{5/2}\left(\tfrac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right). \end{array} \right. \tag{5.33}$$

Dans ces développements, seul l'indice n apparaît car les autres indices l et m sont liés aux harmoniques sphériques Y_l^m dont notre solution radiale est indépendante. Grâce aux résultats (5.29) et (5.32), on voit que $A(\mathbf{w})$ est proportionnel à $S_{3/2}^{(1)}\left(\frac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right)$ et $B(\mathbf{w})$ à $S_{5/2}^{(0)}\left(\frac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right)$, donc dans les développements (5.33), seuls a_1 et b_0 sont non nuls pour un gaz de Maxwell :

$$\boxed{\begin{aligned} A(\mathbf{w}) &= a_1 S_{3/2}^{(1)}\left(\frac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right) \\ B(\mathbf{w}) &= b_0 S_{5/2}^{(0)}\left(\frac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right). \end{aligned}} \tag{5.34}$$

5.3.2 Coefficient de conductivité thermique

Le courant d'énergie $\mathbf{j}_q(\mathbf{r},t)$ à l'ordre ε^0 est défini microscopiquement par (1.23), c'est-à-dire

$$\mathbf{j}_q^{(0)}(\mathbf{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{p}\ \frac{\mathbf{p}-m\mathbf{v}}{m}\frac{(\mathbf{p}-m\mathbf{v})^2}{2m} f_e(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\Phi^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{p},t). \tag{5.35}$$

On va voir que dans le calcul de $\mathbf{j}_q^{(0)}$, n'intervient en général (c'est-à-dire pour un gaz non forcément maxwellien) que le coefficient a_1 du développement (5.33). Pour calculer $\mathbf{j}_q^{(0)}$, on commence par mettre en évidence les unités de (5.35) en utilisant les définitions de la section 2.1.3 :

$$\begin{aligned}
f_e(\mathbf{r},\mathbf{p},t) &= \frac{n_0}{(mk_BT_0)^{3/2}} f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\}) && (5.36)\\
f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\}) &= \frac{\widetilde{n}(\mathbf{x},\tau)}{(2\pi\widetilde{T}(\mathbf{x},\tau))^{3/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}(\mathbf{x},\tau)}\right) && (5.37)\\
\Phi^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{p},t) &= \Phi^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\}) && (5.38)\\
\mathbf{w} &= \mathbf{u}-\mathbf{c}(\mathbf{x},\tau) && (5.39)\\
\mathbf{p} &= \sqrt{mk_BT_0}\,\mathbf{u} && (5.40)\\
\mathbf{v} &= \sqrt{\frac{k_BT_0}{m}}\,\mathbf{c}. && (5.41)
\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\mathbf{j}_q^{(0)} = \frac{1}{2}\frac{(k_BT_0)^{3/2}}{m^{1/2}} n_0 \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ \mathbf{w}\,\mathbf{w}^2\, f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\})\Phi^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\}). \tag{5.42}$$

Dans l'expression de $\Phi^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\})$ donnée par (5.23), le terme proportionnel au tenseur des contraintes $\boldsymbol{D}$ correspond à la partie visqueuse du problème et ne contribue pas au courant d'énergie $\mathbf{j}_q^{(0)}$ (pour des raisons évidentes de symétrie, sa contribution est nulle), si bien que l'expression de $\Phi^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\})$ de contribution non nulle à insérer dans (5.42) est

$$\Phi^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\}) = A(\mathbf{w})\mathbf{w}\cdot\frac{\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x}\widetilde{T}}{\widetilde{T}}, \tag{5.43}$$

ainsi

$$\mathbf{j}_q^{(0)} = \frac{1}{2}\frac{(k_BT_0)^{3/2}}{m^{1/2}} n_0 \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ \mathbf{w}\,\mathbf{w}^2\, f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\})A(\mathbf{w})\mathbf{w}}_{=\frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3\mathbf{w}\ f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\})\mathbf{w}^4 A(\mathbf{w})}\frac{\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x}\widetilde{T}}{\widetilde{T}}. \tag{5.44}$$

Or, grâce aux invariants de collision qui permettent d'écrire (voir (1.11))

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ \mathbf{w}\, f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\})\Phi^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\})\,\mathbf{w}^2\, A(\mathbf{w}) \frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{T}}{\widetilde{T}}, \end{aligned} \tag{5.45}$$

on peut ajouter par exemple $-\frac{5}{2}2\widetilde{T}\mathbf{w}^2$ dans l'intégrand de (5.44) sans changer la valeur de $\mathbf{j}_q^{(0)}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_q^{(0)}(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{2}\frac{(k_BT_0)^{3/2}}{m^{1/2}} n_0 \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\})\, A(\mathbf{w}) \left(\mathbf{w}^4 - \tfrac{5}{2}2\widetilde{T}\mathbf{w}^2\right) \frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{T}}{\widetilde{T}} \\ &= \frac{1}{3}\frac{(k_BT_0)^{3/2}}{m^{1/2}} n_0 \widetilde{T} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ A(\mathbf{w})\mathbf{w}\, f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\}) \cdot \times \\ &\qquad \times \underbrace{\left(\frac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}} - \frac{5}{2}\right)\mathbf{w}}_{\substack{\overset{(5.24)}{=} L[A(\mathbf{w})]\mathbf{w} \\ \overset{(3.20)}{=} -S_{3/2}^{(1)}\left(\frac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right)\mathbf{w}}} \frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{T}}{\widetilde{T}}. \end{aligned} \tag{5.46}$$

Insérant le développement (5.33)

$$A(\mathbf{w}) = \sum_{n\geq 0} a_n S_{3/2}^{(n)}\left(\tfrac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right) \tag{5.47}$$

dans $\mathbf{j}_q^{(0)}$ on a

$$\mathbf{j}_q^{(0)}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{3}\frac{(k_BT_0)^{3/2}}{m^{1/2}} n_0\widetilde{T} \sum_{n\geq 0} a_n I_n \frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{T}}{\widetilde{T}}, \tag{5.48}$$

avec I_n qui peut être calculé explicitement utilisant la relation d'orthogonalité (3.18) des polynômes de Sonine

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\})\, S_{3/2}^{(n)}\left(\tfrac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right)\mathbf{w}\, S_{3/2}^{(1)}\left(\tfrac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right)\mathbf{w}. \tag{5.49}$$

Utilisant l'expression (5.37) de $f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\})$, le changement de variables $\mathbf{x} = \mathbf{w}/\sqrt{2\widetilde{T}}$, les coordonnées sphériques puis le changement de variables $y = ||\mathbf{x}||^2$, on obtient

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{4}{\pi^{1/2}}\widetilde{T}\widetilde{n}\left\langle S_{3/2}^{(n)}(y) \middle| S_{3/2}^{(1)}(y)\right\rangle_{L^2([0,\infty[,y^1\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y)} \\ &\overset{(3.18)}{=} \frac{15}{2}\widetilde{T}\widetilde{n}\delta_{n,1}. \end{aligned} \tag{5.50}$$

L'expression de $\mathbf{j}_q^{(0)}$ avec $\mathbf{x} = \mathbf{r}/\lambda_{\mathrm{mfp}}$ et $\widetilde{T}(\mathbf{x},\tau) = T(\mathbf{x},\tau)/T_0$ ainsi obtenue microscopiquement permet d'établir le lien avec la loi macroscopique de Fourier :

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_q^{(0)}(\mathbf{r},t) &= -\frac{5}{2}\frac{k_B^2 T(\mathbf{r},t)n(\mathbf{r},t)\lambda_{\mathrm{mfp}}}{\sqrt{mk_BT_0}} a_1 \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}}T(\mathbf{r},t) && (5.51) \\ &= -\lambda^{(0)}(\mathbf{r},t)\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}}T(\mathbf{r},t), && (5.52) \\ \lambda^{(0)}(\mathbf{r},t) &= \frac{5}{2}\frac{k_B^2 T(\mathbf{r},t)n(\mathbf{r},t)\lambda_{\mathrm{mfp}}}{\sqrt{mk_BT_0}} a_1. && (5.53) \end{aligned}$$

Le coefficient a_1, défini comme la projection de la solution sur le polynôme de Sonine $S^{(1)}_{3/2}\left(\frac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right)$, contient toute la physique microscopique du problème et dépend donc de la forme de l'interaction entre les particules. L'expression de a_1 s'établit en partie numériquement par formules de quadrature. [CC] en donne l'expression

$$a_1 \;=\; -\frac{1}{n\lambda_{\mathrm{mfp}}}\sqrt{\frac{k_B T_0}{m}}\,a_1(m,\mathcal{X}), \tag{5.54}$$

avec $a_1(m,\mathcal{X})$ un coefficient qui ne dépend que de la masse m et de l'amplitude de la force d'interaction entre molécules $\mathcal{X}$, défini par

$$a_1(m,\mathcal{X}) \;=\; -\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2m}{\mathcal{X}}}\frac{1}{A_2(5)}, \qquad A_2(5) = 0.436\ldots, \tag{5.55}$$

d'où

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n\lambda_{\mathrm{mfp}}}\sqrt{\frac{k_B T_0}{2\mathcal{X}}}\frac{1}{A_2(5)}, \tag{5.56}$$

de sorte que

$$\boxed{\lambda^{(0)}(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{5}{2\pi}\frac{1}{A_2(5)}\frac{k_B^2 T(\mathbf{r},t)}{\sqrt{2m\mathcal{X}}},} \tag{5.57}$$

avec $\mathcal{X}$ l'amplitude de la force définie par (3.2). Il s'agit de l'expression que l'on peut retrouver dans la littérature (voir [CC], [Kr]).

5.3.3 Coefficient de viscosité

Le tenseur de pression $P^{(0)}_{ij}(\mathbf{r},t)$ est défini microscopiquement par (1.22), c'est-à-dire

$$P^{(0)}_{ij}(\mathbf{r},t) \;=\; p\mathbb{1} + \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{p}\;\frac{(\mathbf{p}-m\mathbf{v})_i(\mathbf{p}-m\mathbf{v})_j}{m} f_e(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\Phi^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{p},t), \tag{5.58}$$

avec p la pression hydrostatique qui ne fait intervenir que la distribution d'équilibre $f_e(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ donnée par (1.2)

$$p \;=\; \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{p}\;\frac{(\mathbf{p}-m\mathbf{v})_i(\mathbf{p}-m\mathbf{v})_j}{m} f_e(\mathbf{r},\mathbf{p},t). \tag{5.59}$$

Nous ne nous intéressons par conséquent pas à p, qui est ainsi trivialement définie, et évaluons donc la pression hydrodynamique

$$\Delta P^{(0)}_{ij}(\mathbf{r},t) \;=\; P^{(0)}_{ij}(\mathbf{r},t) - p\mathbb{1}. \tag{5.60}$$

On va voir que dans le calcul de $\Delta P^{(0)}_{ij}$ n'intervient en général que le coefficient b_0 du développement (5.34). Pour ce faire, on commence par mettre en évidence les unités de (5.58) en utilisant les définitions de la section 2.1.3 (comme lors du calcul du coefficient de conductivité thermique) :

$$f_e(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = \frac{n_0}{(mk_BT_0)^{3/2}} f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\}) \tag{5.61}$$

$$f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\}) = \frac{\widetilde{n}(\mathbf{x},\tau)}{(2\pi\widetilde{T}(\mathbf{x},\tau))^{3/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}(\mathbf{x},\tau)}\right) \tag{5.62}$$

$$\Phi^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = \Phi^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\}) \tag{5.63}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{c}(\mathbf{x},\tau) \tag{5.64}$$

$$\mathbf{p} = \sqrt{mk_BT_0}\,\mathbf{u} \tag{5.65}$$

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{k_BT_0}{m}}\,\mathbf{c}. \tag{5.66}$$

Ainsi

$$\Delta P^{(0)}_{ij}(\mathbf{r},t) = k_BT_0n_0 \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\; w_i\, w_j\, f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\})\Phi^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\}). \tag{5.67}$$

On a

$$\Phi^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\}) = A(\mathbf{w})\mathbf{w}\frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{T}}{\widetilde{T}} + B(\mathbf{w})\frac{1}{\widetilde{T}}\left(\mathbf{w}\mathbf{w} - \tfrac{\mathbf{w}^2}{3}\mathbb{1}\right) : \boldsymbol{D}, \tag{5.68}$$

le premier terme ne contribuant pas à la viscosité (5.67) pour des raisons de symétrie. Ainsi

$$\Delta \boldsymbol{P}^{(0)}(\mathbf{r},t) = \frac{k_BT_0n_0}{\widetilde{T}} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\; \mathbf{w}\mathbf{w}\, f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\})\, B(\mathbf{w}) \left(\mathbf{w}\mathbf{w} - \tfrac{\mathbf{w}^2}{3}\mathbb{1}\right) : \boldsymbol{D}. \tag{5.69}$$

Introduisons de nouvelles notations. Soit $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice d'éléments a_{ij}, alors la matrice transposée de $\boldsymbol{A}$ d'éléments a_{ji} sera notée $\boldsymbol{A}^t$. On définit la matrice de trace nulle $\overset{\circ}{\boldsymbol{A}}$ par

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} - \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{A})\,\mathbb{1}. \tag{5.70}$$

On définit la matrice symétrisée $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}$ par

$$\overline{\overline{\boldsymbol{A}}} = \tfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^t\right). \tag{5.71}$$

De ces deux définitions, on conclut que

$$\overset{\circ}{\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{A}}} - \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{A})\,\mathbb{1}. \tag{5.72}$$

Dans ces notations, l'équation (5.69) devient

$$\Delta \boldsymbol{P}^{(0)}(\mathbf{r},t) = \frac{k_BT_0n_0}{\widetilde{T}} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\; \mathbf{w}\mathbf{w}\, f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\})\, B(\mathbf{w}) \left(\overset{\circ}{\mathbf{w}\mathbf{w}} : \boldsymbol{D}\right). \tag{5.73}$$

Pour continuer, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 5.3.1 (Identité tensorielle) *Supposons que $F(||\mathbf{w}||)$ possède les propriétés de régularité nécessaires pour que les intégrales suivantes convergent, et supposons que $\boldsymbol{D}$ ne dépende pas de $\mathbf{w}$, alors*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\; F(||\mathbf{w}||)\,\mathbf{w}\mathbf{w}\left(\overset{\circ}{\mathbf{w}\mathbf{w}} : \boldsymbol{D}\right) = \tfrac{1}{5}\,\overset{\circ}{\overline{\overline{\boldsymbol{D}}}} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\; F(||\mathbf{w}||)\left(\overset{\circ}{\mathbf{w}\mathbf{w}} : \overset{\circ}{\mathbf{w}\mathbf{w}}\right). \tag{5.74}$$

Preuve (Lemme 5.3.1) Commençons par établir les deux relations suivantes. Soient $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in M_3(\mathbb{K})$, alors

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{A}} : \overset{\circ}{\boldsymbol{B}} = \overset{\circ}{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} : \overset{\circ}{\boldsymbol{B}}, \tag{5.75}$$

$$\overline{\overline{\boldsymbol{A}}} : \overline{\overline{\boldsymbol{B}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{A}}} : \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} : \overline{\overline{\boldsymbol{B}}}. \tag{5.76}$$

(5.75) : On remarque que

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\boldsymbol{A}} &= \boldsymbol{A} - \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})\mathbb{1} \\ &= \boldsymbol{A} - \tfrac{1}{3}\mathbb{1} \sum_{i,j=1}^{3} \delta_{i,j} a_{ji} \\ &= \boldsymbol{A} - \tfrac{1}{3}\mathbb{1}(\mathbb{1} : \boldsymbol{A}), \end{aligned} \tag{5.77}$$

ainsi

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\boldsymbol{A}} : \overset{\circ}{\boldsymbol{B}} &= \overset{\circ}{\boldsymbol{A}} : \left(\boldsymbol{B} - \tfrac{1}{3}\mathbb{1}(\mathbb{1} : \boldsymbol{B})\right) \\ &= \overset{\circ}{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{B} - \tfrac{1}{3} \underbrace{\left(\overset{\circ}{\boldsymbol{A}} : \mathbb{1}\right)}_{=\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})\,=\,0} \quad \underbrace{\left(\mathbb{1} : \overset{\circ}{\boldsymbol{B}}\right)}_{=\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{B})\,=\,0}, \end{aligned} \tag{5.78}$$

d'où par symétrie

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{A}} : \overset{\circ}{\boldsymbol{B}} = \overset{\circ}{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} : \overset{\circ}{\boldsymbol{B}}, \tag{5.79}$$

ce qui établi (5.75).
(5.76) : Par définition

$$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} b_{ji} = \sum_{i,j=1}^{3} b_{ij} a_{ji} = \boldsymbol{B} : \boldsymbol{A}, \tag{5.80}$$

donc $\boldsymbol{A}^t : \boldsymbol{B}^t = \boldsymbol{A} : \boldsymbol{B}$ et en utilisant encore $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{A}}}^t$ on a

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\boldsymbol{A}}} : \overline{\overline{\boldsymbol{B}}} &= \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}^t + \boldsymbol{A}) : \overline{\overline{\boldsymbol{B}}} \\ &= \tfrac{1}{2} \underbrace{\boldsymbol{A}^t : \overline{\overline{\boldsymbol{B}}}}_{=\boldsymbol{A} : \overline{\overline{\boldsymbol{B}}}^t} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{A} : \overline{\overline{\boldsymbol{B}}} \\ &= \boldsymbol{A} : \overline{\overline{\boldsymbol{B}}}, \end{aligned} \tag{5.81}$$

d'où par symétrie

$$\overline{\overline{\boldsymbol{A}}} : \overline{\overline{\boldsymbol{B}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{A}}} : \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} : \overline{\overline{\boldsymbol{B}}}, \tag{5.82}$$

ce qui établi (5.76).
Avec (5.75) et (5.76) on en tire

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{B} = \overset{\circ}{\boldsymbol{A}} : \overline{\overline{\boldsymbol{B}}} = \boldsymbol{A} : \overset{\circ}{\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}}, \tag{5.83}$$

et donc en partant du membre de gauche du lemme

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\; F(||\mathbf{w}||)\, \mathbf{ww} \left(\overset{\circ}{\mathbf{ww}} : \boldsymbol{D}\right) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\; F(||\mathbf{w}||)\, \mathbf{ww}\left(\mathbf{ww} : \overset{\circ}{\overline{\overline{\boldsymbol{D}}}}\right). \tag{5.84}$$

Étudions séparément les parties diagonale et non diagonale de cette dernière expression.

Un terme diagonal sera de la forme

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ F(||\mathbf{w}||)\, w_k^2 \Big(\mathbf{ww} : \overset{\circ}{\overline{\overline{\boldsymbol{D}}}}\Big) &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ F(||\mathbf{w}||)\, w_k^2 \sum_{i,j=1}^{3} w_i w_j\, \overset{\circ}{\overline{\overline{D}}}_{ji} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ F(||\mathbf{w}||)\, w_k^2 \sum_{i=1}^{3} w_i^2\, \overset{\circ}{\overline{\overline{D}}}_{ii}, \quad (5.85)\end{aligned}$$

car les termes impaires en w_i donnent une contribution nulle par symétrie. Pour calculer cette intégrale, en passant en coordonnées sphériques on a pour $i = k$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ F(||\mathbf{w}||)\, w_k^4\, \overset{\circ}{\overline{\overline{D}}}_{kk} &= \overset{\circ}{\overline{\overline{D}}}_{kk} \int_0^\infty \mathrm{d}w\ F(w)\, w^4\, w^2 \underbrace{\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\ \cos^4(\theta)\sin(\theta)}_{=\frac{1}{5}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\ \sin(\theta)} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \\ &= \tfrac{1}{5}\, \overset{\circ}{\overline{\overline{D}}}_{kk} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \underbrace{\mathrm{d}w\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi\, w^2 \sin\theta}_{=\mathrm{d}^3\mathbf{w}}\ F(w) w^4 \\ &= \tfrac{1}{5}\, \overset{\circ}{\overline{\overline{D}}}_{kk} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ F(||\mathbf{w}||)\, \mathbf{w}^4. \quad (5.86)\end{aligned}$$

De façon similaire pour $i \neq k$, on peut montrer

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ F(||\mathbf{w}||)\, w_k^2 w_i^2\, \overset{\circ}{\overline{\overline{D}}}_{ii} = \tfrac{1}{15}\, \overset{\circ}{\overline{\overline{D}}}_{ii} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ F(||\mathbf{w}||)\, \mathbf{w}^4. \quad (5.87)$$

Ainsi, les termes diagonaux (5.85) prennent la forme pour $k = 1$ par exemple

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ F(||\mathbf{w}||)\, w_k^2 \Big(\mathbf{ww} : \overset{\circ}{\overline{\overline{\boldsymbol{D}}}}\Big) \\ &\qquad = \left(\tfrac{1}{5}\, \overset{\circ}{\overline{\overline{D}}}_{11} + \tfrac{1}{15}\, \overset{\circ}{\overline{\overline{D}}}_{22} + \tfrac{1}{15}\, \overset{\circ}{\overline{\overline{D}}}_{33}\right) \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ F(||\mathbf{w}||)\, \mathbf{w}^4 \\ &\qquad = \Big(\tfrac{2}{15}\, \overset{\circ}{\overline{\overline{D}}}_{11} + \tfrac{1}{15} \underbrace{\mathrm{Tr}\,(\, \overset{\circ}{\overline{\overline{\boldsymbol{D}}}}\,)}_{=0}\Big) \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ F(||\mathbf{w}||)\, \mathbf{w}^4. \quad (5.88)\end{aligned}$$

Les éléments non diagonaux de (5.84)sont de la forme pour $i \neq j$ avec $\overset{\circ}{\overline{\overline{D}}}_{ij} = \overset{\circ}{\overline{\overline{D}}}_{ji}$

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ F(||\mathbf{w}||)\, w_i w_j \Big(\mathbf{ww} : \overset{\circ}{\overline{\overline{\boldsymbol{D}}}}\Big) \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ F(||\mathbf{w}||)\, w_i w_j \sum_{k,l=1}^{3} w_k w_l\, \overset{\circ}{\overline{\overline{D}}}_{lk} \\ &\quad = 3 \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ F(||\mathbf{w}||)\, w_i w_j w_1^2\, \overset{\circ}{\overline{\overline{D}}}_{11}}_{=0\ :\ \text{symétrie}} + \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ F(||\mathbf{w}||)\, w_i w_j \sum_{k \neq l}^{3} w_k w_l\, \overset{\circ}{\overline{\overline{D}}}_{lk} \\ &\quad = 2 \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ F(||\mathbf{w}||)\, w_i w_j \Big(w_1 w_2\, \overset{\circ}{\overline{\overline{D}}}_{21} + w_1 w_3\, \overset{\circ}{\overline{\overline{D}}}_{31} + w_2 w_3\, \overset{\circ}{\overline{\overline{D}}}_{32}\Big). \quad (5.89)\end{aligned}$$

Or dans cette dernière équation $\{i, j\} \in \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$, d'où pour des raisons de symétrie évidentes un seul des trois termes de l'intégrand donne une contribution non nulle

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ F(||\mathbf{w}||)\, w_i w_j \Big(\mathbf{ww} : \overset{\circ}{\overline{\overline{\boldsymbol{D}}}}\Big) &= 2\, \overset{\circ}{\overline{\overline{D}}}_{ij} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ F(||\mathbf{w}||)\, w_i^2 w_j^2 \\ &\overset{(5.87)}{=} \tfrac{2}{15}\, \overset{\circ}{\overline{\overline{D}}}_{ij} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\, F(||\mathbf{w}||)\mathbf{w}^4. \quad (5.90)\end{aligned}$$

Ainsi, en insérant les éléments diagonaux (5.88) et non diagonaux (5.90) dans (5.84)

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ F(||\mathbf{w}||)\, \mathbf{ww} \left(\overset{\circ}{\mathbf{ww}} \colon \boldsymbol{D}\right) = \tfrac{2}{15}\, \overset{\circ}{\overline{\overline{\boldsymbol{D}}}} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ F(||\mathbf{w}||)\, \mathbf{w}^4. \qquad (5.91)$$

Finalement, remarquons que

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\mathbf{ww}} \colon \overset{\circ}{\mathbf{ww}} &= \overset{\circ}{\mathbf{ww}} \colon \mathbf{ww} \\ &= \left(\mathbf{ww} - \tfrac{1}{3}\mathbb{1}(\mathbb{1} : \mathbf{ww})\right) : \mathbf{ww} \\ &= \sum_{i,j=1}^{3} w_i w_j w_j w_i - \tfrac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} w_i^2 \sum_{j=1}^{3} w_j^2 \\ &= \tfrac{2}{3}\mathbf{w}^4, \end{aligned} \qquad (5.92)$$

donc (5.91) devient

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ F(||\mathbf{w}||)\, \mathbf{ww} \left(\overset{\circ}{\mathbf{ww}} \colon \boldsymbol{D}\right) = \tfrac{1}{5}\, \overset{\circ}{\overline{\overline{\boldsymbol{D}}}} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ F(||\mathbf{w}||) \left(\overset{\circ}{\mathbf{ww}} \colon \overset{\circ}{\mathbf{ww}}\right), \qquad (5.93)$$

ce qui achève la preuve. ■

En appliquant ce lemme à (5.73) on a

$$\Delta\boldsymbol{P}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \frac{k_B T_0 n_0}{5\widetilde{T}}\, \overset{\circ}{\overline{\overline{\boldsymbol{D}}}} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ f_e(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \{\tau\})\, B(\mathbf{w})\ \overset{\circ}{\mathbf{ww}} \colon \overset{\circ}{\mathbf{ww}}\, . \qquad (5.94)$$

Insérant le développement (5.34)

$$B(\mathbf{w}) = \sum_{n\geq 0} b_n S_{5/2}^{(n)}\left(\tfrac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right), \qquad (5.95)$$

ainsi que

$$\overset{\circ}{\mathbf{ww}} = \frac{1}{S_{5/2}^{(0)}\left(\frac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right)} S_{5/2}^{(0)}\left(\tfrac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right) \overset{\circ}{\mathbf{ww}}, \qquad S_{5/2}^{(0)}\left(\tfrac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right) = 1, \qquad (5.96)$$

on obtient

$$\Delta\boldsymbol{P}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \frac{k_B T_0 n_0}{5\widetilde{T}}\, \overset{\circ}{\overline{\overline{\boldsymbol{D}}}} \sum_{n\geq 0} b_n I_n, \qquad (5.97)$$

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ f_e(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \{\tau\}) S_{5/2}^{(n)}\left(\tfrac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right) \overset{\circ}{\mathbf{ww}} \colon S_{5/2}^{(0)}\left(\tfrac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right) \overset{\circ}{\mathbf{ww}}\, . \qquad (5.98)$$

I_n peut être calculé explicitement avec (5.92) en procédant de façon similaire au calcul du coefficient de conduction thermique :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ f_e(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \{\tau\}) S_{5/2}^{(n)}\left(\frac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right) S_{5/2}^{(0)}\left(\frac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right) \frac{2}{3}\mathbf{w}^4 \\ &= \frac{16}{3\pi^{1/2}} \widetilde{n}\widetilde{T}^2 \left\langle S_{5/2}^{(n)} \middle| S_{5/2}^{(0)} \right\rangle_{L^2\left([0,\infty[, y^{5/2}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\right)} \\ &= 10\widetilde{n}\widetilde{T}^2 \delta_{n,0}. \end{aligned} \tag{5.99}$$

Ainsi

$$\Delta \boldsymbol{P}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = 2nk_B T b_0 \overset{\circ}{\overline{\overline{\boldsymbol{D}}}}, \tag{5.100}$$

avec

$$\boldsymbol{D} = \sqrt{\frac{m}{k_B T_0}} \lambda_{\mathrm{mfp}} \boldsymbol{\Lambda}, \tag{5.101}$$

on a

$$\Delta \boldsymbol{P}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = 2\sqrt{\frac{mk_B}{T_0}} \lambda_{\mathrm{mfp}} n T b_0 \overset{\circ}{\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}}. \tag{5.102}$$

Or l'expression (1.20) pour la viscosité de cisaillement est

$$\Delta \boldsymbol{P}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = -2\eta^{(0)}(\mathbf{r}, t)\big(\boldsymbol{\Lambda} - \tfrac{1}{3}\mathbb{1}\underbrace{(\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t))}_{=\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\Lambda})}\big) = -2\eta^{(0)}(\mathbf{r}, t) \overset{\circ}{\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}}, \tag{5.103}$$

d'où par comparaison de (5.102) et (5.103)

$$\eta^{(0)}(\mathbf{r}, t) = -\sqrt{\frac{mk_B}{T_0}} \lambda_{\mathrm{mfp}} n T b_0. \tag{5.104}$$

Le coefficient b_0, défini comme la projection de la solution sur le polynôme de Sonine $S_{5/2}^{(0)}\left(\frac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right)$, s'obtient par des formules de quadrature. [CC] en donne l'expression

$$b_0 = -\frac{1}{n\lambda_{\mathrm{mfp}}} \sqrt{\frac{k_B T_0}{m}} b_0(m, \mathcal{X}), \tag{5.105}$$

avec

$$b_0(m, \mathcal{X}) = \frac{1}{3\pi} \sqrt{\frac{2m}{\mathcal{X}}} \frac{1}{A_2(5)}, \tag{5.106}$$

donc

$$b_0 = -\frac{1}{3\pi} \sqrt{\frac{2k_B T_0}{\mathcal{X}}} \frac{1}{A_2(5)} \frac{1}{\lambda_{\mathrm{mfp}}} \frac{1}{n}, \tag{5.107}$$

de sorte que

$$\boxed{\eta^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \frac{k_B T(\mathbf{r}, t)}{3\pi} \sqrt{\frac{2m}{\mathcal{X}}} \frac{1}{A_2(5)}.} \tag{5.108}$$

Il s'agit de l'expression que l'on peut retrouver dans la littérature (voir [CC], [Kr]). Les valeurs des coefficients de transport λ et η ainsi obtenues sont en très bon accord avec l'expérience (voir [Be] p. 111, 112.).

5.4 Ordre ε^1

5.4.1 Résolution de l'équation et coefficients de transport

L'équation à résoudre est

$$L[\Psi^{(1)}] = \mathbf{u}\cdot\frac{\nabla_{\mathbf{x}}\widetilde{n}}{\widetilde{n}} - \frac{\nabla_{\mathbf{x}}\widetilde{T}}{\widetilde{T}}\cdot\left(\frac{(\mathbf{u}-\mathbf{c})^2}{2\widetilde{T}} - \frac{3}{2}\right)\mathbf{u} - \frac{1}{\widetilde{T}}\sum_{i,j=1}^{3} u_i(\mathbf{u}-\mathbf{c})_j\frac{\partial c_j}{\partial x_i}. \quad (5.109)$$

Comme évoqué dans la section 5.2, cette dernière équation est assez similaire à celle de l'ordre ε^0 qui a pu être résolue. Néanmoins, ces différences ont pour conséquence qu'il n'est pas possible d'exploiter exactement les mêmes astuces de calcul. En effet, le terme engendrant le coefficient de conductivité thermique, soit le facteur de $\nabla_{\mathbf{x}}\widetilde{T}/\widetilde{T}$, est linéaire en $\mathbf{u}$ et non plus en $\mathbf{u}-\mathbf{c}$. Ce brisement de symétrie empêche de poser une forme d'essai pour $\Phi^{(1)}$ comme (5.23). Dans le cas du coefficient de viscosité, la présence de $u_i(\mathbf{u}-\mathbf{c})_j$ empêche la mise en évidence du tenseur des contraintes $\boldsymbol{D}$, ce qui aurait permis le lien avec les lois phénoménologiques macroscopiques. Enfin, on ne sait pas comment traiter le premier terme fonction du gradient de la densité $\widetilde{n}$ pour établir un lien avec la macroscopie. Ces remarques préliminaires permettent de conclure qu'il n'est pas possible d'appliquer les méthodes standard pour étudier l'ordre ε^1.

Néanmoins, il est tout de même possible d'obtenir des résultats en resommant certains termes de (5.109). Soit $\mathbf{w}=\mathbf{u}-\mathbf{c}$, alors en utilisant

$$\sum_{i,j=1}^{3} w_i w_j\frac{\partial c_j}{\partial x_i} = \mathbf{ww}:\boldsymbol{D}, \quad (5.110)$$

(5.109) peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} L[\Psi^{(1)}] = {} & \underbrace{\mathbf{w}\cdot\frac{\nabla_{\mathbf{x}}\widetilde{n}}{\widetilde{n}}}_{①} \underbrace{+\mathbf{c}\cdot\frac{\nabla_{\mathbf{x}}\widetilde{n}}{\widetilde{n}}}_{②} \underbrace{-\frac{\nabla_{\mathbf{x}}\widetilde{T}}{\widetilde{T}}\cdot\left(\frac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}-\frac{3}{2}\right)\mathbf{w}}_{③} \\ & \underbrace{-\frac{\nabla_{\mathbf{x}}\widetilde{T}}{\widetilde{T}}\cdot\left(\frac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}-\frac{3}{2}\right)\mathbf{c}}_{④} \underbrace{-\frac{1}{\widetilde{T}}\mathbf{ww}:\boldsymbol{D}}_{⑤} \underbrace{-\frac{1}{\widetilde{T}}\sum_{i,j=1}^{3} c_i w_j\frac{\partial c_j}{\partial x_i}}_{⑥}. \end{aligned} \quad (5.111)$$

Grâce à la linéarité de L, on peut traiter chaque terme ① à ⑥ séparément, avec solutions respectives $\Psi^{(1)}_{①}$ à $\Psi^{(1)}_{⑥}$ et solution finale

$$\Psi^{(1)} = \sum_{i=1}^{6}\Psi^{(1)}_{①}. \quad (5.112)$$

On calcule directement la contribution de chaque terme aux coefficients de transport.

① La solution est de la forme

$$\Psi^{(1)}_{①} = \frac{\nabla_{\mathbf{x}}\widetilde{n}}{\widetilde{n}}\cdot A_{①}(\mathbf{w})\mathbf{w}. \quad (5.113)$$

En effet, l'équation pour $\Psi^{(1)}_{①}$ devient alors

$$L[\Psi^{(1)}_{①}] \;=\; L\left[\frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{n}}{\widetilde{n}}\cdot A_{①}(\mathbf{w})\mathbf{w}\right] \;=\; \mathbf{w}\cdot\frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{n}}{\widetilde{n}} \tag{5.114}$$

$$\Longrightarrow \qquad L[A_{①}(\mathbf{w})\mathbf{w}] \;=\; \mathbf{w}, \tag{5.115}$$

d'où

$$A_{①}(\mathbf{w}) \;\propto\; S^{(0)}_{3/2} \;=\; 1 \tag{5.116}$$

car dans ce cas $A_{①}(\mathbf{w}) \propto \psi_{01m}(\mathbf{w})$ qui est fonction propre de l'opérateur de collision

$$L[\psi_{01m}(\mathbf{w})] \;\propto\; \psi_{01m}(\mathbf{w}) \;\propto\; \mathbf{w}. \tag{5.117}$$

En résumé, on a donc en écrivant $a_0^{①}$ le coefficient de proportionnalité de (5.116)

$$\Psi^{(1)}_{①} \;=\; \frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{n}}{\widetilde{n}}\cdot a_0^{①} S^{(0)}_{3/2}\mathbf{w}. \tag{5.118}$$

• Coefficient de conductivité thermique : on remarque que $\Psi^{(1)}_{①} \propto S^{(0)}_{3/2}\mathbf{w}$, comme lors de l'étude à l'ordre ε^k, $k \geq 2$ (voir la section 5.5.2). Or dans ce dernier cas on a établi que la contribution au coefficient de conductivité thermique est nulle, et par conséquent il en est de même ici.

• Coefficient de viscosité : comme $\Psi^{(1)}_{①} \propto S^{(0)}_{3/2}\mathbf{w}$, la discussion est la même que pour l'ordre ε^k, $k \geq 2$, et donc la contribution au coefficient de viscosité nulle.

② La solution est de la forme

$$\Psi^{(1)}_{②} = \frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{n}}{\widetilde{n}}\cdot A_{②}(\mathbf{w})\mathbf{c}. \tag{5.119}$$

En effet, l'équation pour $\Psi^{(1)}_{②}$ est alors

$$L[\Psi^{(1)}_{②}] \;=\; L\left[\frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{n}}{\widetilde{n}}\cdot A_{②}(\mathbf{w})\mathbf{c}\right] \;=\; \mathbf{c}\cdot\frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{n}}{\widetilde{n}} \tag{5.120}$$

$$\Longrightarrow \qquad L[A_{②}(\mathbf{w})] \;=\; 1, \tag{5.121}$$

d'où

$$A_{②}(\mathbf{w}) \;\propto\; S^{(0)}_{1/2} \;=\; 1 \tag{5.122}$$

car dans ce cas $A_{②}(\mathbf{w}) \propto \psi_{000}(\mathbf{w})$ qui est fonction propre de l'opérateur de collision. En résumé, on a donc

$$\Psi^{(1)}_{②} \;=\; \frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{n}}{\widetilde{n}}\cdot \mathbf{c}a_0^{②} S^{(0)}_{1/2}. \tag{5.123}$$

• Coefficient de conductivité thermique : par la définition (1.23) du courant d'énergie $\mathbf{j}_q$ et en introduisant les grandeurs adimentionalisées

(5.36) à (5.41) on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}_q^{②}(\mathbf{r},t) &\propto \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{u}\ (\mathbf{u}-\mathbf{c})(\mathbf{u}-\mathbf{c})^2 f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\})\Psi_{②}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\}) \\
&\propto \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{u}\ (\mathbf{u}-\mathbf{c})(\mathbf{u}-\mathbf{c})^2 \exp\left(-\tfrac{(\mathbf{u}-\mathbf{c})^2}{2\widetilde{T}}\right) \frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{n}(\mathbf{x},\tau)}{\widetilde{n}(\mathbf{x},\tau)} \cdot \mathbf{c} a_0^{②} S_{1/2}^{(0)} \\
&\propto \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ \mathbf{w}\mathbf{w}^2 \mathrm{e}^{-\mathbf{w}^2} \\
&= 0. \qquad (5.124)
\end{aligned}$$

Cette dernière expression est bien nulle par parité, et donc la contribution au coefficient de viscosité thermique est ainsi nulle.

• Coefficient de viscosité : en reprenant l'expression (5.67) adaptée à notre cas avec $S_m^{(0)}(x) = 1\ \forall\ m$

$$\begin{aligned}
\Delta P_{ij}^{②}(\mathbf{r},t) &= k_B T_0 n_0 \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ w_i w_j\ f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\})\Psi_{②}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\}) \\
&= k_B T_0 n_0 (\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{n}\cdot\mathbf{c}) a_0^{②} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ \frac{w_i w_j}{(2\pi\widetilde{T})^{3/2}} \exp\left(-\tfrac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right) \\
&\overset{\mathbf{x}=\frac{\mathbf{w}}{\sqrt{2\widetilde{T}}}}{=} \tfrac{2}{\pi^{3/2}} k_B T (\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{n}\cdot\mathbf{c}) a_0^{②} I_{ij}, \qquad (5.125)
\end{aligned}$$

avec

$$I_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{x}\ x_i x_j \mathrm{e}^{-x^2}. \qquad (5.126)$$

Si $i \neq j$, alors clairement $I_{ij} = 0$ par parité. Si $i = j$, par exemple $i = 1$, alors

$$I_{11} = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x_1\ x_1^2\,\mathrm{e}^{-x_1^2}}_{=\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-x^2}\right)^2}_{=\pi} = \frac{\pi^{3/2}}{2}, \qquad (5.127)$$

d'où

$$\Delta P_{ij}^{②}(\mathbf{r},t) = k_B T (\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} n\cdot\mathbf{c}) a_0^{②} \delta_{ij}, \qquad (5.128)$$

ainsi

$$\boldsymbol{P}^{②}(\mathbf{r},t) = p\mathbb{1} + k_B T (\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} n\cdot\mathbf{c}) a_0^{②} \mathbb{1}. \qquad (5.129)$$

Un nouveau terme diagonal apparaît, qui dépend du coefficient inconnu $a_0^{②}$. Une connexion avec les lois macroscopiques n'est ici pas directement possible car le tenseur des contraintes n'apparaît pas. Par contre, si $a_0^{②} = 0$, alors la pression (viscosité) n'est pas modifiée. On va montrer que tel est le cas. On sait que

$$\Psi_{②}^{(1)} = \frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{n}}{\widetilde{n}} \cdot \mathbf{c} A_{②}(\mathbf{w}), \qquad (5.130)$$

avec $A_{②}(\mathbf{w}) \propto \psi_{000}$. Or ψ_{000} est justement une fonction propre du noyau de L, ainsi $\Psi_{②}^{(1)} \in \ker(L)$. Mais par le lemme 3.1.1, les coefficients correspondants aux fonctions propres du noyau de L sont nulles. Par conséquent $a_0^{②} = 0$ et $\Psi_{②}^{(1)}$ ne contribue pas à la viscosité.

③ Décomposons ce terme selon

$$-\frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{T}}{\widetilde{T}}\cdot\left(\frac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}-\frac{3}{2}\right)\mathbf{w} \;=\; \underbrace{-\frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{T}}{\widetilde{T}}\cdot\left(\frac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}-\frac{5}{2}\right)\mathbf{w}}_{ⓐ}\;\underbrace{-\frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{T}}{\widetilde{T}}\cdot\mathbf{w}}_{ⓑ}. \tag{5.131}$$

Le terme ⓐ est au signe près le même que celui de l'ordre ε^0, donc sa contribution au coefficient de conductivité thermique est

$$\boxed{\lambda^{(1)}_{③}(\mathbf{r},t) \;=\; -\lambda^{(0)}(\mathbf{r},t).} \tag{5.132}$$

Pour ce qui est du terme ⓑ qui est linéaire en $\mathbf{w}$, la discussion est en tout point similaire à celle du terme ①, et donc ne contribue pas aux coefficients de transport.

④ Décomposons ce terme selon

$$-\frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{T}}{\widetilde{T}}\cdot\left(\frac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}-\frac{3}{2}\right)\mathbf{c} \;=\; \underbrace{-\frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{T}}{\widetilde{T}}\cdot\frac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\mathbf{c}}_{ⓐ}\;\underbrace{+\frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{T}}{\widetilde{T}}\cdot\mathbf{c}}_{ⓑ}. \tag{5.133}$$

Le terme ⓑ, linéaire en $\mathbf{c}$, est en tout point similaire au terme ②, par conséquent ne contribue pas aux coefficients de transport.

En ce qui concerne le terme ⓐ, la solution est de la forme

$$\Psi^{(1)}_{④} = -\frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{T}}{2\widetilde{T}^2}\cdot\mathbf{c}A_{④}(\mathbf{w})\mathbf{w}^2. \tag{5.134}$$

En effet, l'équation pour $\Psi^{(1)}_{④}$ est alors

$$L[\Psi^{(1)}_{④}] \;=\; -L\left[\frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{T}}{2\widetilde{T}^2}\cdot\mathbf{c}A_{④}(\mathbf{w})\mathbf{w}^2\right] \;=\; -\frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{T}}{2\widetilde{T}^2}\cdot\mathbf{c}\mathbf{w}^2 \tag{5.135}$$

$$\Longrightarrow\; L[A_{④}(\mathbf{w})\mathbf{w}^2] \;=\; \mathbf{w}^2, \tag{5.136}$$

d'où

$$A_{④}(\mathbf{w}) \,\propto\, S^{(0)}_{5/2} \;=\; 1 \tag{5.137}$$

car dans ce cas $A_{④}(\mathbf{w})\mathbf{w}^2 \propto \psi_{02m}(\mathbf{w})$ qui est fonction propre de l'opérateur de collision. En résumé

$$\Psi^{(1)}_{④} \;=\; -\frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{T}}{2\widetilde{T}^2}\cdot\mathbf{c}a_0^{④}S^{(0)}_{5/2}\mathbf{w}^2. \tag{5.138}$$

• Coefficient de conductivité thermique : utilisant l'équation (5.42)

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}^{④}_q(\mathbf{r},t) \;&=\; \frac{1}{2}\frac{(k_BT_0)^{3/2}}{m^{1/2}}n_0\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3\mathbf{w}\;\mathbf{w}\mathbf{w}^2\,f_e(\mathbf{x},\mathbf{u},\{\tau\})\Psi^{(1)}_{④}(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\})\\
&=\; -\frac{1}{4}\frac{(k_BT_0)^{3/2}}{m^{1/2}}n_0\frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\widetilde{T}}{\widetilde{T}}\cdot\mathbf{c}a_0^{④}\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3\mathbf{w}\;\mathbf{w}\mathbf{w}^2\,f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\})}_{=0\,:\,\text{symétrie}}\\
&=\; 0.
\end{aligned} \tag{5.139}$$

Ce coefficient reste donc inchangé.

• Coefficient de viscosité : utilisant (5.67) avec le changement de variables $\mathbf{x} = \mathbf{w}/\sqrt{2\widetilde{T}}$

$$\begin{aligned}\Delta P_{ij}^{④}(\mathbf{r},t) &= k_B T_0 n_0 \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ w_i w_j\, f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\})\Psi_{④}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\}) \\ &= -\frac{2k_B n}{\pi^{3/2}}(\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}T\cdot\mathbf{c})a_0^{④} I_{ij}, \end{aligned} \tag{5.140}$$

avec

$$I_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{x}\ x_i x_j \mathbf{x}^2\, \mathrm{e}^{-\mathbf{x}^2}. \tag{5.141}$$

Si $i \neq j$, alors on vérifie facilement que $I_{ij} = 0$ pour des raisons de parité. Si $i = j$, par exemple $i = j = 1$, alors

$$\begin{aligned} I_{11} &= \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{x}\ x_1^2 x_i^2\, \mathrm{e}^{-\mathbf{x}^2} \\ &= \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x_1\ x_1^4\, \mathrm{e}^{-x_1^2}}_{=\frac{3}{4}\pi^{1/2}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-x^2}\right)^2}_{=\pi} + 2\underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x_1\ x_1^2\, \mathrm{e}^{-x_1^2}\right)^2}_{=\frac{1}{4}\pi} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-x^2}}_{=\pi^{1/2}} \\ &= \tfrac{5}{4}\pi^{3/2}. \end{aligned} \tag{5.142}$$

On a donc

$$\Delta P_{ij}^{④}(\mathbf{r},t) = -\tfrac{5}{2} k_B n (\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}T\cdot\mathbf{c})a_0^{④}\delta_{ij}, \tag{5.143}$$

qui devient en introduisant les variables dimensionnelles $\mathbf{x} = \mathbf{r}/\lambda_{\mathrm{mfp}}$, $\mathbf{c} = \sqrt{\frac{m}{k_B T_0}}\mathbf{v}$,

$$\Delta P_{ij}^{④}(\mathbf{r},t) = -\tfrac{5}{2}\sqrt{\frac{m k_B}{T_0}}\lambda_{\mathrm{mfp}} a_0^{④} n(\mathbf{r},t)(\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}}T(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{v}(\mathbf{r},t))\delta_{ij}. \tag{5.144}$$

Ce terme est purement diagonal, par conséquent ne contribue pas au coefficient de viscosité de cisaillement η. Par contre, il engendre une contribution au coefficient de viscosité volumique ζ, dont la définition macroscopique de contribution purement diagonale est $\boldsymbol{\Delta P}(\mathbf{r},t) = -\zeta(\mathbf{r},t)\mathbb{1}(\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{v}(\mathbf{r},t))$. Néanmoins, (5.144) n'a pas en évidence la divergence du champ de vitesse moyen $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ ce qui aurait permis de faire la connexion immédiate avec la loi macroscopique (le champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ est à priori inconnu, donc on aimerait avoir un coefficient qui n'en dépende pas). Cependant, il faut se rappeler que la loi $\boldsymbol{\Delta P}(\mathbf{r},t) = -\zeta(\mathbf{r},t)\mathbb{1}(\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{v}(\mathbf{r},t))$ est linéaire pour un fluide newtonien. Par conséquent, l'expression obtenue de la pression engendre une correction au coefficient de viscosité volumique. Notons ainsi

$$\zeta(\mathbf{r},t) = \zeta_n(\mathbf{r},t) + \zeta_c(\mathbf{r},t), \tag{5.145}$$

avec $\zeta_n(\mathbf{r},t)$ le coefficient phénoménologique newtonien indépendant de $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ pour lequel la pression est proportionnelle à $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$, et $\zeta_c(\mathbf{r},t)$ sa correction qui peut dépendre du champ de vitesse moyenne $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$. L'expression (5.144) dépend encore du coefficient $a_0^{④}$ qui est la projection de la solution sur le polynôme de Sonine $S_{5/2}^{(0)}$. L'égalité de notre calcul microscopique avec la loi macroscopique fournit l'expression suivante pour $\zeta^{(1)}_{c,④}(\mathbf{r},t)$ (en supposant que $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r},t) \neq 0$) :

$$\zeta^{(1)}_{c,④}(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{5}{2}\sqrt{\frac{mk_B}{T_0}}\lambda_{\mathrm{mfp}} a_0^{④} n(\mathbf{r},t)\frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}}T(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{v}(\mathbf{r},t)}. \tag{5.146}$$

De plus, [CC] nous enseigne que les coefficients $a_0^{④}$ ont la forme

$$a_0^{④} \;=\; -\frac{1}{n\lambda_{\mathrm{mfp}}}\sqrt{\frac{k_BT_0}{m}}a_0^{④}(m,\mathcal{X}), \tag{5.147}$$

avec $a_0^{④}(m,\mathcal{X})$ un autre coefficient qui ne dépend que de la masse m et de l'amplitude de la force d'interaction entre molécules $\mathcal{X}$. Ainsi

$$\boxed{\zeta^{(1)}_{c,④}(\mathbf{r},t) \;=\; -\frac{5}{2}k_B\frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}}T(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{v}(\mathbf{r},t)}a_0^{④}(m,\mathcal{X}).} \tag{5.148}$$

⑤ Décomposons ce terme selon

$$-\frac{1}{\widetilde{T}}\mathbf{w}\mathbf{w} \;=\; \underbrace{-\frac{1}{\widetilde{T}}\left(\mathbf{w}\mathbf{w}-\tfrac{1}{3}\mathbf{w}^2\mathbb{1}\right):\boldsymbol{D}}_{ⓐ}\;\underbrace{-\frac{1}{\widetilde{T}}\frac{1}{3}\mathbf{w}^2\mathbb{1}:\boldsymbol{D}}_{ⓑ}. \tag{5.149}$$

Le terme ⓐ est au signe près le même que celui de l'ordre ε^0, donc sa contribution à la viscosité est

$$\boxed{\eta^{(1)}_{ⓐ}(\mathbf{r},t) \;=\; -\eta^{(0)}(\mathbf{r},t).} \tag{5.150}$$

Pour ce qui est du terme ⓑ, la solution est de la forme

$$\Psi^{(1)}_{⑤} \;=\; -B_{⑤}(\mathbf{w})\frac{1}{3\widetilde{T}}\mathbf{w}^2\mathbb{1}:\boldsymbol{D}. \tag{5.151}$$

En effet, l'équation pour $\Psi^{(1)}_{⑤}$ est alors

$$L[\Psi^{(1)}_{⑤}] \;=\; -\frac{1}{3\widetilde{T}}\mathbb{1}:\boldsymbol{D}\,L[B_{⑤}\mathbf{w}^2] \;=\; -\frac{1}{3\widetilde{T}}\mathbf{w}^2\mathbb{1}:\boldsymbol{D} \tag{5.152}$$

$$\Longrightarrow \quad L[B_{⑤}\mathbf{w}^2] \;=\; \mathbf{w}^2, \tag{5.153}$$

d'où

$$B_{⑤}(\mathbf{w}) \;\propto\; S^{(0)}_{5/2} \;=\; 1 \tag{5.154}$$

car dans ce cas $B_{⑤}(\mathbf{w}) \propto \psi_{02m}$ qui est fonction propre de l'opérateur de collision. En résumé,

$$\Psi^{(1)}_{⑤} \;=\; -\frac{1}{3\widetilde{T}}\mathbb{1}:\boldsymbol{D}b_0^{⑤}S^{(0)}_{5/2}\mathbf{w}^2. \tag{5.155}$$

• Coefficient de conductivité thermique : pour des raisons de symétrie évidentes, ce terme ne contribue pas.

• Coefficient de viscosité : avec l'équation (5.67) et le changement de variables $\mathbf{x} = \mathbf{w}/\sqrt{2\widetilde{T}}$

$$\begin{aligned} \Delta P_{ij}^{⑤}(\mathbf{r},t) &= k_B T_0 n_0 \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ w_i w_j\, f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\}) \Psi_{⑤}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\}) \\ &= -\frac{4}{3}\frac{1}{\pi^{3/2}} n k_B T b_0^{⑤} I_{ij} \mathbb{1} : \boldsymbol{D}, \end{aligned} \tag{5.156}$$

avec

$$I_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{x}\ x_i x_j \mathbf{x}^2\, \mathrm{e}^{-\mathbf{x}^2}. \tag{5.157}$$

Le calcul de I_{ij}, déjà effectué (voir (5.141) et suivants), donne $I_{ij} = \frac{5}{4}\pi^{3/2}\delta_{ij}$, d'où avec $\boldsymbol{D} = \lambda_{\mathrm{mfp}}\sqrt{\frac{m}{k_B T_0}}\boldsymbol{\Lambda}$

$$\Delta \boldsymbol{P}^{⑤}(\mathbf{r},t) = -\frac{5}{3}\sqrt{\frac{m k_B}{T_0}} \lambda_{\mathrm{mfp}} b_0^{⑤} n(\mathbf{r},t) T(\mathbf{r},t) (\mathbb{1} : \boldsymbol{\Lambda})\mathbb{1}. \tag{5.158}$$

À nouveau, ce terme est purement diagonal et par conséquent ne contribue pas au coefficient de viscosité de cisaillement η, mais à la viscosité volumique ζ. En utilisant

$$\mathbb{1} : \boldsymbol{\Lambda} = \sum_{i,j=1}^{3} \delta_{ij}\Lambda_{ij} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r},t), \tag{5.159}$$

l'égalité avec la loi macroscopique $\Delta \boldsymbol{P}(\mathbf{r},t) = -\zeta(\mathbf{r},t)\mathbb{1}(\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r},t))$ avec $\zeta(\mathbf{r},t) = \zeta_n(\mathbf{r},t) + \zeta_c(\mathbf{r},t)$ engendre

$$\zeta_{n,⑤}^{(1)}(\mathbf{r},t) = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{m k_B}{T_0}} \lambda_{\mathrm{mfp}} b_0^{⑤} n(\mathbf{r},t) T(\mathbf{r},t). \tag{5.160}$$

De même, [CC] fournit

$$b_0^{⑤} = -\frac{1}{n\lambda_{\mathrm{mfp}}}\sqrt{\frac{k_B T_0}{m}}\, b_0^{⑤}(m,\mathcal{X}), \tag{5.161}$$

d'où

$$\boxed{\zeta_{n,⑤}^{(1)}(\mathbf{r},t) = -\frac{5}{3} k_B T(\mathbf{r},t) b_0^{⑤}(m,\mathcal{X}).} \tag{5.162}$$

⑥ La solution est de la forme

$$\Psi_{⑥}^{(1)} = -\frac{1}{\widetilde{T}} \sum_{i,j=1}^{3} c_i \frac{\partial c_j}{\partial x_i} A_{⑥}(\mathbf{w}) w_j. \tag{5.163}$$

En effet, l'équation pour $\Psi_{⑥}^{(1)}$ est alors

$$\begin{aligned} L[\Psi_{⑥}^{(1)}] &= -L\left[\frac{1}{\widetilde{T}} \sum_{i,j=1}^{3} c_i \frac{\partial c_j}{\partial x_i} A_{⑥}(\mathbf{w}) w_j\right] \\ &= -\frac{1}{\widetilde{T}} \sum_{i,j=1}^{3} c_i \frac{\partial c_j}{\partial x_i} L[A_{⑥}(\mathbf{w}) w_j] \\ &= -\frac{1}{\widetilde{T}} \sum_{i,j=1}^{3} c_i \frac{\partial c_j}{\partial x_i} w_j, \qquad \forall \mathbf{w} \end{aligned} \tag{5.164}$$

$$\Longrightarrow \quad L[A_{⑥}(\mathbf{w}) w_j] = w_j, \tag{5.165}$$

d'où

$$A_{⑥}(\mathbf{w}) \;\propto\; S^{(0)}_{3/2} \;=\; 1 \tag{5.166}$$

car dans ce cas $A_{⑥}(\mathbf{w})w_j \propto \psi_{01m}(\mathbf{w})$ qui est fonction propre de l'opérateur de collision. En résumé

$$\Psi^{(1)}_{⑥} \;=\; -\frac{1}{\widetilde{\widetilde{T}}} \sum_{i,j=1}^{3} c_i \frac{\partial c_j}{\partial x_i} S^{(0)}_{3/2} w_j. \tag{5.167}$$

En ce qui concerne les coefficients de transport, la discussion est en tout point similaire à celle du terme ①, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune contribution supplémentaire à ces coefficients.

5.4.2 Récapitulation

La contribution à l'ordre ε^1 au coefficient de conductivité thermique est

$$\boxed{\lambda^{(1)}(\mathbf{r},t) \;=\; -\lambda^{(0)}(\mathbf{r},t),} \tag{5.168}$$

celle au coefficient de viscosité de cisaillement

$$\boxed{\eta^{(1)}(\mathbf{r},t) \;=\; -\eta^{(0)}(\mathbf{r},t),} \tag{5.169}$$

et finalement la viscosité volumique (supposant $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r},t) \neq 0$)

$$\zeta^{(1)}(\mathbf{r},t) \;=\; \zeta^{(1)}_n(\mathbf{r},t) + \zeta^{(1)}_c(\mathbf{r},t) \tag{5.170}$$

$$\zeta^{(1)}_n(\mathbf{r},t) \;=\; -\tfrac{5}{3} k_B T(\mathbf{r},t) b^{⑤}_0(m,\mathcal{X}) \tag{5.171}$$

$$\zeta^{(1)}_c(\mathbf{r},t) \;=\; -\tfrac{5}{2} k_B \frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}} T(\mathbf{r},t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r},t)} a^{④}_0(m,\mathcal{X}), \tag{5.172}$$

avec $\zeta^{(1)}_n(\mathbf{r},t)$ la partie newtonienne et $\zeta^{(1)}_c(\mathbf{r},t)$ sa correction. Malgré l'analogie selon laquelle $a^{④}_0$, $b^{⑤}_0$ et b_0 sont tous des projections sur le polynôme de Sonine $S^{(0)}_{5/2}$ (et donc le second membre des équations (5.135), (5.151) et (5.30) est quadratique en $\mathbf{w}$), on n'a pas $a^{④}_0 = b_0$ ni $b^{⑤}_0 = b_0$. En effet, la différence est que dans le cas de b_0, ce second membre est le tenseur de trace nulle $\mathring{\mathbf{w}\mathbf{w}}$, tandis que pour $a^{④}_0$ ainsi que $b^{⑤}_0$ il s'agit de $\mathbf{w}^2 = \mathrm{Tr}\,(\mathbf{w}\mathbf{w})$. Par contre, on en déduit que $a^{④}_0 = b^{⑤}_0$. Un long calcul reproduit dans l'annexe A.1 établit la nullité de ces coefficients

$$a^{④}_0 \;=\; b^{⑤}_0 \;=\; 0, \tag{5.173}$$

d'où

$$\zeta^{(1)}(\mathbf{r},t) \;=\; \zeta^{(1)}_n(\mathbf{r},t) \;=\; \zeta^{(1)}_c(\mathbf{r},t) \;=\; 0. \tag{5.174}$$

5.5 Ordre ε^k, $k \geq 2$

5.5.1 Résolution de l'équation

L'équation à résoudre est

$$L[\Psi^{(2)}] = \frac{1}{\widetilde{\widetilde{T}}} \widetilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{w}, \tag{5.175}$$

donc on peut essayer une solution de la forme

$$\Psi^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\}) = \frac{\widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x})}{\widetilde{T}(\mathbf{x},\tau)} \cdot A^{(2)}(\mathbf{w})\mathbf{w}, \tag{5.176}$$

de sorte que l'équation à résoudre soit

$$L[A^{(2)}(\mathbf{w})\mathbf{w}] = \mathbf{w}. \tag{5.177}$$

On se souvient des fonctions propres (3.16) de l'opérateur de collision

$$\psi_{nlm}(x) \;\propto\; x^l S^{(n)}_{l+1/2}(x^2), \tag{5.178}$$

par conséquent

$$A^{(2)}(\mathbf{w})\mathbf{w} \;\propto\; S^{(0)}_{3/2}\left(\frac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right)\mathbf{w} \;\propto\; \psi_{01m}(\mathbf{w}), \tag{5.179}$$

avec $S^{(0)}_{3/2}\left(\frac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right) = 1$. Par conséquent, l'équation (5.177) est bien vérifiée, et on posera

$$A^{(2)}(\mathbf{w}) = a_0^{(2)} S^{(0)}_{3/2}\left(\frac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right), \tag{5.180}$$

donc

$$\boxed{\Psi^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\}) = \frac{\widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x})}{\widetilde{T}(\mathbf{x},\tau)} \cdot a_0^{(2)} S^{(0)}_{3/2}\left(\frac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right)\mathbf{w},} \tag{5.181}$$

avec $a_0^{(2)} \in \mathbb{R}$ le coefficient à déterminer.

5.5.2 Coefficient de conductivité thermique

La déviation $\Psi^{(2)}$ par rapport à l'ordre ε^1 n'ayant pas de gradient $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}} T(\mathbf{r},t)$ en évidence, il sera alors difficile d'établir le lien avec la loi phénoménologique de Fourier pour en tirer le coefficient de conductivité thermique. Néanmoins, on va montrer en suivant la démarche exposée dans la section 5.3.2, que de toute façon la contribution au coefficient de conductivité thermique est nulle à cet ordre. En effet, en partant de la définition (1.23) adaptée à notre cas

$$\mathbf{j}_q^{(2)}(\mathbf{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{p}\; \frac{\mathbf{p}-m\mathbf{v}}{m}\frac{(\mathbf{p}-m\mathbf{v})^2}{2m}\, f_e(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\Psi^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{p},t), \tag{5.182}$$

que l'on adimentionalise puis y insère le développement

$$A^{(2)}(\mathbf{w}) = \sum_{n\geq 0} a_n^{(2)} S^{(n)}_{3/2}\left(\frac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right) \tag{5.183}$$

et procède comme dans la section 5.3.2,[1] on obtient (5.48)

$$j_q^{(2)}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{3}\frac{(k_B T_0)^{3/2}}{m^{1/2}} n_o \widetilde{T} \sum_{n\geq 0} a_n I_n, \tag{5.184}$$

1. La condition pour utiliser ces résultats est que $\Psi^{(2)}$ ait la même forme que $\Phi^{(0)}$, c'est-à-dire que $\Psi^{(2)}$ soit proportionnel à $S^{(m)}_{3/2}\,\mathbf{w}$.

avec

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}\ f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\})\, S^{(n)}_{3/2}\left(\tfrac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right) \mathbf{w}\cdot S^{(1)}_{3/2}\left(\tfrac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right)\mathbf{w} \tag{5.185}$$

$$= \tfrac{4}{\pi^{1/2}}\widetilde{T}\widetilde{n}\left\langle S^{(n)}_{3/2}(y)\middle| S^{(1)}_{3/2}(y)\right\rangle_{L^2\left([0,\infty[,y^{3/2}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\right)} \tag{5.186}$$

$$= \tfrac{15}{2}\widetilde{T}\widetilde{n}\delta_{n,1}. \tag{5.187}$$

Ainsi

$$\mathbf{j}^{(2)}_q(\mathbf{r},t) = -\frac{5}{2}\frac{(k_BT_0)^{3/2}}{m^{1/2}} n_0\widetilde{T}^2\widetilde{n}\underbrace{\sum_{n\geq 0} a^{(2)}_n\delta_{n,1}}_{=\,a^{(2)}_1\,=\,0} \tag{5.188}$$

qui est nul car par (5.181) seul $a^{(2)}_0$ est susceptible d'être non nul. On a ainsi montré que le courant de chaleur, par conséquent le coefficient de conductivité thermique, est le même à l'ordre ε^2 qu'à l'ordre ε^1 :

$$\boxed{\lambda^{(2)}(\mathbf{r},t) = \lambda^{(1)}(\mathbf{r},t).} \tag{5.189}$$

5.5.3 Coefficient de viscosité

La déviation $\Psi^{(2)}$ par rapport à l'ordre ε^1 n'ayant pas le tenseur des contraintes en évidence, il sera dans ce cas aussi difficile d'établir le lien avec la loi phénoménologique. En reprenant l'expression (5.67) adaptée à notre cas on a

$$\begin{aligned}\Delta P^{(2)}_{ij}(\mathbf{r},t) &= k_BT_0n_0\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3\mathbf{w}\ w_i\,w_j\,f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\})\Psi^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\}) \\ &\overset{\mathbf{x}=\frac{\mathbf{w}}{\sqrt{2\widetilde{T}}}}{=} \frac{k_BT_0n_0}{\widetilde{T}}\sum_{k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3\mathbf{w}\ w_i\,w_j\,f_e(\mathbf{x},\mathbf{u};\{\tau\})\times \\ &\qquad\qquad \times F_k(\mathbf{x})a^{(2)}_0 S^{(0)}_{3/2}\left(\tfrac{\mathbf{w}^2}{2\widetilde{T}}\right)w_k \\ &= \frac{k_BT_0n_0}{\widetilde{T}}\frac{\widetilde{n}}{\pi^{3/2}}(2\widetilde{T})^{3/2}a^{(2)}_0\sum_{k=1}^{3}F_k(\mathbf{x})I_{ijk},\end{aligned} \tag{5.190}$$

avec

$$I_{ijk} = \int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3\mathbf{x}\ x_i\,x_j\,x_k\,\mathrm{e}^{-\mathbf{x}^2}. \tag{5.191}$$

Montrons que $I_{ijk} = 0\ \forall\ i,j,k$. Si $i \neq j \neq k$, alors pour des raisons de symétrie on voit tout de suite que $I_{ijk} = 0$. Si $i = j$ ou $i = k$ ou $j = k$, alors de même il est clair que $I_{ikk} = 0$ à cause de la puissance impaire en x_i. Finalement, si $i = j = k$ on aura un terme impair x_k^3 qui engendre la nullité de I_{kkk}.

Ainsi $\Delta P^{(2)}_{ij}(\mathbf{r},t) = 0$, et le coefficient de viscosité à l'ordre ε^2 est le même qu'à l'ordre ε^1 :

$$\boxed{\eta^{(2)}(\mathbf{r},t) = \eta^{(1)}(\mathbf{r},t).} \tag{5.192}$$

5.6 Récapitulation

Nous avons montré que

$$\lambda(\mathbf{r},t) = \begin{cases} \frac{5}{2\pi}\frac{1}{A_2(5)}\frac{k_B^2 T(\mathbf{r},t)}{\sqrt{2m\mathcal{X}}}, & \varepsilon = 0 \\ 0, & \varepsilon \geq 1, \end{cases} \tag{5.193}$$

et

$$\eta(\mathbf{r},t) = \begin{cases} \frac{1}{3\pi}\frac{1}{A_2(5)}\sqrt{\frac{2m}{\mathcal{X}}}k_B T(\mathbf{r},t), & \varepsilon = 0 \\ 0, & \varepsilon \geq 1, \end{cases} \tag{5.194}$$

et

$$\zeta(\mathbf{r},t) \;=\; 0, \quad \varepsilon \geq 0, \tag{5.195}$$

où $A_2(5) = 0.436\ldots$

5.7 Interprétations

On conclut que le calcul avec la théorie des échelles multiples de temps n'apporte aucune information de plus que la théorie "classique". Pourquoi ?
Le fait que les lois de conservation soient vraient pour toute échelle de temps implique que pour les grandeurs $T(\mathbf{x},\{\tau\})$, $\mathbf{c}(\mathbf{x},\{\tau\})$, $n(\mathbf{x},\{\tau\})$ tous les temps deviennent équivalents. En effet, ces grandeurs vérifient alors les mêmes lois de conservation, et donc il n'existe de fait qu'une seule et unique échelle relevante de temps. Ainsi, comme l'état est entièrement déterminé par T, $\mathbf{c}$ et n, on doit retrouver cette équivalence des temps (temps unique) dans la solution finale. Ainsi ces longs et lourds calculs ne font que vérifier une évidence physique qui est loin d'être évidente mathématiquement.

Annexe A

Appendices

A.1 Coefficient de viscosité volumique

A.1.1 Position du problème

Au vu de (5.136) et (5.153), on est ramené dans tous les cas à résoudre une équation du type

$$L[C(\mathbf{w})\mathbf{w}^2] \;=\; \mathbf{w}^2. \tag{A.1}$$

Dans ce cas, on a vu que $C(\mathbf{w}) \propto S^{(0)}_{5/2}(\mathbf{w}^2)$, où on notera c_0 le coefficient de proportionnalité. Considérons le développement

$$C(\mathbf{w}) \;=\; \sum_{p\geq 0} c_p S^{(p)}_{5/2}(\mathbf{w}^2) \tag{A.2}$$

$$C \;=\; C(\mathbf{w})\mathbf{w}^2 = \sum_{p\geq 0} c_p C^{(p)}, \qquad C^{(p)} = S^{(p)}_{5/2}(\mathbf{w}^2)\mathbf{w}^2. \tag{A.3}$$

Notre but est de calculer $a^{④}_0(m,\mathcal{X}) = b^{⑤}_0(m,\mathcal{X}) = c_0$. Les calculs qui suivent sont fortement inspirés de [CC], donc nous allons dans cette annexe adopter en grande partie les notations de la référence en question. Cela permet d'établir plus facilement un lien avec le contenu de la référence, qui fournit une panoplie d'autres informations complémentaires. Soit

$$nI[F] \;\doteqdot\; \int_{\mathbb{R}^3\times[0,\infty[\times[0,2\pi]} \mathrm{d}^3\mathbf{c}\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\;\mathbf{g}\,b\,f^{(0)}_1 f^{(0)}(F_1 + F - F'_1 - F'), \tag{A.4}$$

avec n la densité, $g = |\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2|$ la norme des vitesses relatives, b le paramètre d'impact, ε l'angle polaire de diffusion dans le centre de masse, $f^{(0)}$ la distribution d'équilibre local, $\mathbf{c}$ la vitesse. Dans ces notations, l'équation de Boltzmann à résoudre est

$$nI[C] \;=\; f^{(0)} S^{(0)}_{5/2}(\mathbf{w}^2)\mathbf{w}^2. \tag{A.5}$$

On multiplie cette dernière relation par $C^{(q)} = S^{(q)}_{5/2}(\mathbf{w}^2)\mathbf{w}^2$ puis intègre sur $\mathrm{d}^3\mathbf{c}$ pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{c}\; I[C]C^{(q)} \;=\; \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{c}\; f^{(0)} S^{(0)}_{5/2}(\mathbf{w}^2)\mathbf{w}^2 S^{(q)}_{5/2}(\mathbf{w}^2)\mathbf{w}^2}_{\doteqdot\,\beta_q}. \tag{A.6}$$

Introduisons la notation

$$[F,G] = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{c}\ I[F]G, \tag{A.7}$$

alors (A.6) devient

$$[C, C^{(q)}] = \beta_q. \tag{A.8}$$

Or par (A.3)

$$\left[C, C^{(q)}\right] = \sum_{p\geq 0} \underbrace{\left[C^{(p)}, C^{(q)}\right]}_{\doteqdot b_{pq}} \stackrel{(A.8)}{=} \beta_q, \tag{A.9}$$

d'où

$$\boxed{\sum_{p\geq 0} c_p b_{pq} = \beta_q.} \tag{A.10}$$

Coefficient β_q

Dans (A.10), aussi bien c_p que b_{pq} sont difficiles à calculer. Seul β_q est immédiat à trouver. En effet, avec

$$f^{(0)}\mathrm{d}^3\mathbf{c} = \frac{n}{\pi^{3/2}}\mathrm{e}^{-\mathbf{e}^2}\mathrm{d}^3\mathbf{w} \tag{A.11}$$

puis le changement de variables $x = \mathbf{w}^2$ on a

$$\begin{aligned}
\beta_q &= \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{c}\ f^{(0)} S_{5/2}^{(0)}(\mathbf{w}^2)\mathbf{w}^2 S_{5/2}^{(q)}(\mathbf{w}^2)\mathbf{w}^2 \\
&= \frac{4\pi}{2\pi^{3/2}}\int_0^\infty \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-x}x^{5/2}S_{5/2}^{(q)}(x)S_{5/2}^{(0)}(x) \\
&= \frac{4\pi}{2\pi^{3/2}}\left\langle S_{5/2}^{(q)}(x)\middle| S_{5/2}^{(0)}(x)\right\rangle_{L^2([0,\infty[,\mathrm{e}^{-x}x^{5/5}\mathrm{d}x)} \\
&= \frac{4\pi}{2\pi^{3/2}}\sqrt{\pi}\frac{15}{8}\delta_{q,0} \\
&= \frac{15}{4}\delta_{q,0}.
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Insérant la valeur de β_q dans (A.10)

$$\sum_{p\geq 0} c_p b_{p0} = \beta_0, \tag{A.13}$$

or nous savons que $c_p = c_p\delta_{p,0}$, ainsi (A.13) implique

$$\boxed{c_0 = \frac{\beta_0}{b_{00}}.} \tag{A.14}$$

Notations

Comme mentionné précédemment, nous adoptons en grande partie les notations de [CC] dans cette annexe, car la démarche de calcul présentée est fortement inspirée de celle de la référence mentionnée. Néanmoins, cette dernière fait usage d'un formalisme plus général pour un gaz binaire. Par conséquent, il va falloir introduire quelques notations supplémentaires permettant de se ramener ensuite à gaz monomoléculaire qui nous intéresse.

Soit F une fonction définie dans le premier domaine de vitesses (on considère un gaz binaire, pour lequel l'espace des vitesses de chaque espèce est considéré distinct de l'autre), alors on note

$$n_1^2 I_1[F] = \int_{\mathbb{R}^{3\times 2}} \mathrm{d}^3\mathbf{c}\,\mathrm{d}^3\mathbf{e}'\;\mathbf{g}\,\alpha_1\,f_1^{(0)}f^{(0)}(F_1 + F - F - 1' - F'), \tag{A.15}$$

avec α_1 qui est la section efficace différentielle entre molécules de même espèce, tandis que l'on notera α_{12} celle entre molécules différentes. La définition de I_2 est similaire à (A.15). Supposons K une fonction des vitesses $\mathbf{c}_1$ et $\mathbf{c}_2$ des espèces de molécules, alors on écrit

$$n_1 n_2 I_{12}[K] = \int_{\mathbb{R}^{3\times 2}} \mathrm{d}^3\mathbf{e}'\,\mathrm{d}^3\mathbf{c}_2\;f_1^{(0)}f_1^{(0)}(K - K')g\alpha_{12} \tag{A.16}$$

$$n_1 n_2 I_{21}[K] = \int_{\mathbb{R}^{3\times 2}} \mathrm{d}^3\mathbf{e}'\,\mathrm{d}^3\mathbf{c}_1\;f_1^{(0)}f_1^{(0)}(K - K')g\alpha_{12}. \tag{A.17}$$

Ainsi $I_1[F]$ et $I_{12}[K]$ sont fonctions de $\mathbf{c}_1$, tandis que $I_2[F]$ et $I_{21}[K]$ sont fonctions de $\mathbf{c}_2$, avec

$$f_i^{(0)} = n_i\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}\exp\left(-\tfrac{m}{2k_BT}(\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_0)^2\right), \qquad \mathbf{C}_i = \mathbf{c}_i - \mathbf{c}_0. \tag{A.18}$$

Par extension, on définit le produit scalaire $[F,G]_1$ comme suit. Supposons que F et G soient des fonctions définies dans le premier domaine de vitesses, alors

$$[F,G]_1 = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{c}_1\;G_1 I_1[F]. \tag{A.19}$$

Cette dernière expression, supposant les conditions de régularité usuelles, est bien bornée car $I_1[F]$ ainsi que G_1 sont des fonctions de $\mathbf{c}_1$. On sait que les fonctions de distribution vérifient

$$f_1^{(0)'}f^{(0)'} = f_1^{(0)}f^{(0)}, \qquad f_2^{(0)'}f^{(0)'} = f_2^{(0)}f^{(0)}, \qquad f_1^{(0)'}f_2^{(0)'} = f_1^{(0)}f_2^{(0)}, \tag{A.20}$$

et on vérifie la relation pour tout ϕ

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}\times} \mathrm{d}^3\mathbf{e}'\,\mathrm{d}^3\mathbf{c}\,\mathrm{d}^3\mathbf{c}_1\;\mathbf{g}\,\alpha_1\,\phi_1(F_1G + FG_1 - F_1'G' - F'G_1')\\ &= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}\times} \mathrm{d}^3\mathbf{e}'\,\mathrm{d}^3\mathbf{c}\,\mathrm{d}^3\mathbf{c}_1\;\mathbf{g}\,\alpha_1(\phi + \phi_1 - \phi_1' - \phi')(F_1G + FG_1 - F_1'G' - FG_1').\end{aligned} \tag{A.21}$$

Utilisant (A.20) et (A.21), si F, H sont définies dans le premier domaine et G, K dans le second. on peut montrer que

$$[F_1 + G_2, H_1 + K_2]_{12} = [H_1 + K_2, F_1 + G_2]_{12}, \tag{A.22}$$

ce qui est l'équivalent de $[F,G]_1 = [G,F]_1$. Si n_1 et n_2 représentent le même gaz de sorte à ce que $\alpha_{12} = \alpha_1$, alors

$$[F_1, G_1 + G_2]_{12} = [F,G]_1. \tag{A.23}$$

Ce dernier résultat permet, comme on le verra dans la section A.1.1, d'établir le lien entre les relations générales du gaz composé de deux espèces de molécules et du cas monoparticulaire qui nous intéresse.

Expression implicite de b_{pq}

Pour obtenir le coefficient c_0, ayant calculé β_0 il est encore nécessaire de trouver b_{00}. À la lumière des notations de la section précédente, notons $[\cdot]_1$ au lieu de $[\cdot]$ donc (A.9) devient

$$b_{pq} \;=\; \big[C^{(p)}, C^{(q)}\big]_1 \;=\; \big[S^{(p)}_{5/2}(\mathbf{w}^2)\mathbf{w}^2, S^{(q)}_{5/2}(\mathbf{w}^2)\mathbf{w}^2\big]_1. \tag{A.24}$$

Or, nous ne savons pas calculer b_{pq} directement pour une espèce (cela nous éloignerait trop des précieux indices contenus dans la référence [CC], établis dans le cas général du gaz de deux espèces), mais pouvons réaliser le calcul dans le cas de deux espèces. Ainsi avec (A.23) et (A.24)

$$\boxed{b_{pq} \;=\; \big[S^{(p)}_{5/2}(\mathbf{w}_1^2)\mathbf{w}_1^2, S^{(q)}_{5/2}(\mathbf{w}_2^2)\mathbf{w}_2^2\big]_{12} + \big[S^{(p)}_{5/2}(\mathbf{w}_1^2)\mathbf{w}_1^2, S^{(q)}_{5/2}(\mathbf{w}_1^2)\mathbf{w}_1^2\big]_{12}.} \tag{A.25}$$

Nous voyons donc apparaître deux termes, que nous calculons dans les sections A.1.2 et A.1.3 respectivement.

A.1.2 Premier terme $[1, 2]_{12}$

Pour calculer le coefficient b_{00}, il est nécessaire d'étudier d'abord le problème plus général à deux espèces

$$b_{pq} \;=\; \big[S^{(p)}_{5/2}(\mathbf{w_1}^2)\mathbf{w}_1^2, S^{(q)}_{5/2}(\mathbf{w}_2^2)\mathbf{w}_2^2\big]_{12}, \tag{A.26}$$

puis poser l'égalité des espèces lorsque cela s'avère nécessaire. En utilisant la notation (A.7) ainsi que

$$I_{ij}(F) \;=\; \frac{1}{n_1 n_2}\int \mathrm{d}^3\mathbf{c}_j\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}b\;\mathbf{g}\,b\,f_1^{(0)} f_2^{(0)}(F - F') \tag{A.27}$$

(voir [CC] p.83), on a

$$\begin{aligned}\big[S^{(p)}_{5/2}(\mathbf{w_1}^2)\mathbf{w}_1^2, S^{(q)}_{5/2}(\mathbf{w_2}^2)\mathbf{w}_2^2\big]_{12} \;&=\; \frac{1}{n_1 n_2}\int \mathrm{d}^3\mathbf{c}_1\,\mathrm{d}^3\mathbf{c}_2\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}b\;\mathbf{g}\,b\,f_1^{(0)} f_2^{(0)}\times\\ &\times\Big(S^{(p)}_{5/2}(\mathbf{w_1}^2)\mathbf{w}_1^2 - S^{(q)}_{5/2}(\mathbf{w}_1'^2)\mathbf{w}_1'^2\Big)S^{(q)}_{5/2}(\mathbf{w}_2^2)\mathbf{w}_2^2.\end{aligned} \tag{A.28}$$

Avant de continuer, il est nécessaire d'introduire la définition formelle du polynôme de Sonine.

Soit $s \in]0, 1[$, $S = s(1-s)^{-1}$, alors $S^{(n)}_m(x)$ est défini par le développement

$$\left(\frac{S}{s}\right)^{m+1}\mathrm{e}^{-xS} \;=\; \frac{1}{(1-s)^{m+1}}\mathrm{e}^{-x\frac{s}{1-s}} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} s^n S^{(n)}_m(x). \tag{A.29}$$

On peut montrer qu'en réalisant le développement de Taylor de $(1-s)^{-m-1}\mathrm{e}^{-x\frac{s}{1-s}}$ que l'on égale au membre de droite de (A.29), on obtient l'expression (3.17) du polynôme de Sonine. Comparant (A.29) avec (A.28), on en conclut que (A.28) est égal au coefficient de $s^p t^q$ du développement en puissances de s et t de

$$\begin{aligned}&\left(\frac{ST}{st}\right)^{7/2}\frac{1}{n_1 n_2}\int \mathrm{d}^3\mathbf{c}_1\,\mathrm{d}^3\mathbf{c}_2\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}b\;\mathbf{g}\,b\,f_1^{(0)} f_2^{(0)}\times\\ &\qquad\times\Big(\mathrm{e}^{-S\mathbf{w}_1^2}\mathbf{w}_1^2 - \mathrm{e}^{-S\mathbf{w}_1'^2}\mathbf{w}_1'^2\Big)\mathbf{w}_2^2\mathrm{e}^{-T\mathbf{w}_2^2},\end{aligned} \tag{A.30}$$

avec $T = t(1-t)^{-1}$, $t \in]0,1[$. En effet, on le vérifie facilement en insérant (A.29) dans (A.30) que l'on compare à (A.28). En y substituant les valeurs $f_1^{(0)}\mathrm{d}^3\mathbf{c}_1 = n_1\pi^{-3/2}\mathrm{e}^{-\mathbf{w}_1^2}\mathrm{d}^3\mathbf{w}_1$ et $f_2^{(0)}\mathrm{d}^3\mathbf{c}_2 = n_1\pi^{-3/2}\mathrm{e}^{-\mathbf{w}_2^2}\mathrm{d}^3\mathbf{w}_2$ avec $\mathbf{w}_1^2 + \mathbf{w}_2^2 = \mathbf{w}_0^2 + \mathbf{g}^2$ (voir [CC] p.149, 150), l'expression (A.30) est égale à

$$\left(\frac{ST}{st}\right)^{7/2} \frac{1}{\pi^3} \int \mathrm{d}^3\mathbf{g}\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}b\;\mathbf{g}\,b\,\left(L_{12}(0) - L_{12}(\chi)\right) \tag{A.31}$$

$$L_{12}(\chi) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}_0\;\mathrm{e}^{-\mathbf{w}_0^2-\mathbf{g}^2-S\mathbf{w}_1'^2-T\mathbf{w}_2^2}\mathbf{w}_1'^2\mathbf{w}_2^2. \tag{A.32}$$

Ainsi, le coefficient b_{pq} est égal au coefficient de $s^p t^q$ du développement en puissances de s et t de (A.31). La différence avec le calcul canonique est que dans notre cas on a $\mathbf{w}_1'^2\mathbf{w}_2^2$ dans $L_{12}(\chi)$, au lieu de $\mathbf{w}_1'\mathbf{w}_1' : \mathbf{w}_2\mathbf{w}_2$. Le calcul à réaliser est le suivant. Il faut simplifier au maximum $L_{12}(\chi)$ grâce à des changements de variables judicieux, pour ensuite l'introduire explicitement dans (A.31). Comme on s'intéresse en particulier au coefficient b_{00} et non pas au cas général b_{pq}, il va alors être possible de réaliser le développement de Taylor de (A.31) en puissances de s et t pour mettre en évidence le coefficient de s^0t^0. Finalement, l'expression obtenue devra être exprimée en termes d'une fonction $\Omega_1^{(l)}(r)$ contenant les calculs non triviaux d'intégration de la section efficace, mais qui dans le cas du gaz de Maxwell est connue et ses valeurs sont données dans [CC].

Simplification de L_{12}

Soient les changements de variables (voir [CC] p.150, 151)

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \sqrt{M_1}\mathbf{w}_0 - \sqrt{M_2}\mathbf{g} && \text{(A.33)}\\ \mathbf{w}_2 &= \sqrt{M_2}\mathbf{w}_0 + \sqrt{M_1}\mathbf{g} && \text{(A.34)}\\ \mathbf{w}_1' &= \sqrt{M_1}\mathbf{w}_0 - \sqrt{M_2}\mathbf{g}', && \text{(A.35)} \end{aligned}$$

avec $|\mathbf{g}| = |\mathbf{g}'|$ et $M_i = m_i m^{-1}$, $m = \sum_{i=1}^2 m_i$, donc dans notre cas $M_1 = M_2 = 1/2$. Nous garderons pour le moment les variables M_1 et M_2 distinctes. Ainsi

$$\mathbf{w}_1^2 + \mathbf{w}_2^2 = \mathbf{w}_0^2 + \mathbf{g}^2 \tag{A.36}$$

$$\mathbf{g}\cdot\mathbf{g}' = \mathbf{g}^2\cos\chi, \tag{A.37}$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_0^2 + \mathbf{g}^2 + S\mathbf{w}_1'^2 + T\mathbf{w}_2^2 &= i_{12}\mathbf{w}_0^2 + i_{21}\mathbf{g}^2 + 2\sqrt{M_1M_2}\mathbf{w}_0(T\mathbf{g} - S\mathbf{g}') && \text{(A.38)}\\ i_{12} &= 1 + M_1S + M_2T && \text{(A.39)}\\ i_{21} &= 1 + M_2S + M_1T. && \text{(A.40)} \end{aligned}$$

Introduisons le changement de variables

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}_0 + \frac{1}{i_{12}}\sqrt{M_1M_2}(T\mathbf{g} - S\mathbf{g}'), \qquad \mathrm{d}^3\mathbf{v} = \mathrm{d}^3\mathbf{w}_0\,, \tag{A.41}$$

d'où

$$\mathbf{w}_0^2 + \mathbf{g}^2 + S\mathbf{w}_1'^2 + T\mathbf{w}_2^2 = i_{12}\mathbf{v}^2 + j_{12}\mathbf{g}^2, \tag{A.42}$$

avec

$$j_{12} = i_{21} - \frac{M_1M_2}{i_{12}}\left(S^2 + T^2 - 2ST\cos\chi\right). \tag{A.43}$$

Grâce à ce changement de variables, l'expression (A.32) devient

$$L_{12}(\chi) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{v}\ \mathrm{e}^{-i_{12}\mathbf{v}^2 - j_{12}\mathbf{g}^2} \mathbf{w}_1'^2 \mathbf{w}_2^2. \tag{A.44}$$

Exprimons $\mathbf{w}_1' = \mathbf{w}_1'(\mathbf{v})$ et $\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_2(\mathbf{v})$. Soient les changements de variables

$$\mathbf{v}_1 = \frac{M_1}{i_{12}}(T\mathbf{g} - S\mathbf{g}') + \mathbf{g}', \qquad \mathbf{w}_1' = \sqrt{M_1}\mathbf{v} - \sqrt{M_2}\mathbf{v}_1 \tag{A.45}$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{M_1}{i_{12}}(T\mathbf{g} - S\mathbf{g}') - \mathbf{g}, \qquad \mathbf{w}_2 = \sqrt{M_2}\mathbf{v} - \sqrt{M_1}\mathbf{v}_2, \tag{A.46}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_1'^2\mathbf{w}_2^2 = M_1M_2\mathbf{v}^4 + \mathbf{v}^2\left(M_1^2\mathbf{v}_2^2 + M_2^2\mathbf{v}_1^2\right) + 4M_1M_2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_1)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_2)\\ + M_1M_2\mathbf{v}_1^2\mathbf{v}_2^2 + \mathcal{O}\left(\mathbf{v}^{2k+1}, k\in\mathbb{N}\right),\end{aligned} \tag{A.47}$$

ce qui donne en l'insérant dans (A.44) et en utilisant la relation générale (3.24)

$$\begin{aligned}L_{12}(\chi) = \mathrm{e}^{-j_{12}\mathbf{g}^2}\pi^{3/2}M_1M_2 i_{12}^{-7/2}\times\\ \times\left(\frac{15}{4} + i_{12}\left(2(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2) + \frac{3}{2}\frac{M_1^2\mathbf{v}_2^2 + M_2^2\mathbf{v}_1^2}{M_1M_2}\right) + i_{12}^2\mathbf{v}_1^2\mathbf{v}_2^2\right).\end{aligned} \tag{A.48}$$

Il reste à calculer $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1^2\mathbf{v}_2^2$ et $\mathbf{v}_1^2$, $\mathbf{v}_2^2$. Des définitions utilisées on a (voir [CC] p.152, 153)

$$\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{g}^2}{i_{12}}(1 - j_{12} - \cos\chi) \tag{A.49}$$

$$\mathbf{v}_1^2\mathbf{v}_2^2 = (\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2) + \frac{\mathbf{g}^4}{i_{12}^2}\sin^2\chi \tag{A.50}$$

$$\stackrel{(A.49)}{=} \frac{\mathbf{g}^4}{i_{12}^2}\left((1 - j_{12} - \cos\chi)^2 + \sin^2\chi\right), \tag{A.51}$$

d'où

$$\begin{aligned}L_{12}(\chi) = \pi^{3/2}M_1M_2\mathrm{e}^{-j_{12}\mathbf{g}^2} i_{12}^{-7/2}\Bigg(\frac{15}{4} + 2\mathbf{g}^2(1 - j_{12} - \cos\chi)\\ + i_{12}\frac{3}{2}\frac{M_1^2\mathbf{v}_2^2 + M_2\mathbf{v}_1^2}{M_1M_2} + \mathbf{g}^4\left((1 - j_{12} - \cos\chi)^2 + \sin^2\chi\right)\Bigg).\end{aligned} \tag{A.52}$$

Il reste à calculer $\mathbf{v}_1^2$ et $\mathbf{v}_2^2$. Pour ce faire, on est obligé de poser le cas particulier $M_1 = M_2 = 1/2$, ce qui est d'ailleurs dans notre modèle le cas que l'on désire étudier car les particules sont identiques. Ainsi

$$\frac{M_1^2\mathbf{v}_2^2 + M_2\mathbf{v}_1^2}{M_1M_2} = \mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2, \tag{A.53}$$

et avec la définition de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ on a

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{i_{12}^2}\left(\mathbf{g}^2(T^2 + S^2) - 2ST\mathbf{g}^2\cos\chi\right) + 2\mathbf{g}^2\\ + \frac{1}{i_{12}}\left((S + T)\mathbf{g}^2\cos\chi - (T + S)\mathbf{g}^2\right),\end{aligned} \tag{A.54}$$

d'où

$$L_{12}(\chi) = \pi^{3/2} M_1 M_2 \mathrm{e}^{-j_{12}\mathbf{g}^2} i_{12}^{-7/2} \bigg(\frac{15}{4} + 2\mathbf{g}^2(1 - j_{12} - \cos\chi)$$
$$+ \mathbf{g}^4 \left((1 - j_{12} - \cos\chi)^2 + \sin^2\chi\right) + \frac{3}{4} i_{12}^{-1} \mathbf{g}^2 \left(S^2 + T^2 - 2ST\cos\chi\right)$$
$$+ 3 i_{12}\mathbf{g}^2 + \frac{3}{2}\mathbf{g}^2 (S+T)(\cos\chi - 1)\bigg). \quad (A.55)$$

Notons

$$G_{12}(\chi) \doteqdot \left(\frac{ST}{st}\right)^{7/2} \frac{1}{M_1 M_2} \frac{1}{\pi^{3/2}} L_{12}(\chi), \quad (A.56)$$

alors

$$G_{12}(\chi) = (1 - y_{12})^{-7/2} \mathrm{e}^{-j_{12}\mathbf{g}^2} \bigg(\frac{15}{4} + 2\mathbf{g}^2(1 - j_{12} - \cos\chi)$$
$$+ \mathbf{g}^4 \left((1 - j_{12} - \cos\chi)^2 + \sin^2\chi\right) + \frac{3}{4} i_{12}^{-1} \mathbf{g}^2 \left(S^2 + T^2 - 2ST\cos\chi\right)$$
$$+ 3 i_{12}\mathbf{g}^2 + \frac{3}{2}\mathbf{g}^2 (S+T)(\cos\chi - 1)\bigg), \quad (A.57)$$

avec

$$y_{12} = M_2 s + M_1 t = \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}t \quad (A.58)$$
$$z_{12} = 2M_1 M_2 st(1 - \cos\chi) = \tfrac{1}{2}st(1 - \cos\chi), \quad (A.59)$$

vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{lllllllll} \dfrac{i_{12}}{ST} & = & \dfrac{1 - y_{12}}{st}, & \dfrac{\partial j_{12}}{\partial y_{12}} & = & \dfrac{j_{12}}{1 - y_{12}}, & j_{12} & = & \dfrac{1 - z_{12}}{1 - y_{12}} \\ S & = & \dfrac{s}{1-s}, & T & = & \dfrac{t}{1-t}, & s,t & \in &]0,1[. \end{array} \right. \quad (A.60)$$

Ainsi

$$G_{12}(\chi) = (1 - y_{12})^{-7/2} \mathrm{e}^{-j_{12}\mathbf{g}^2} \bigg(\frac{15}{4} + 2\mathbf{g}^2 - 2\mathbf{g}^2 j_{12} - 2\mathbf{g}^2\cos\chi$$
$$+ \mathbf{g}^4 \left((1 - j_{12} - \cos\chi)^2 + \sin^2\chi\right) + \frac{3}{2}\mathbf{g}^2 (T+S)(\cos\chi - 1)\bigg)$$
$$+ (1 - y_{12})^{-9/2} \mathrm{e}^{-j_{12}\mathbf{g}^2} \frac{3}{4} \frac{st}{ST} \mathbf{g}^2 \left(S^2 + T^2 - 2ST\cos\chi\right)$$
$$+ (1 - y_{12})^{-5/2} \mathrm{e}^{-j_{12}\mathbf{g}^2} 3\mathbf{g}^2 \frac{ST}{st}. \quad (A.61)$$

Pour continuer, il est nécessaire d'établir quelques identités concernant les polynômes de Sonine $S_m^{(n)}(x)$, dont la définition est à titre de rappel

$$\left(\frac{S}{s}\right)^{m+1} \mathrm{e}^{-xS} = \frac{1}{(1-s)^{m+1}} \mathrm{e}^{-x\frac{s}{1-s}} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} s^n S_m^{(n)}(x). \quad (A.62)$$

Lemme A.1.1 (Identités de Sonine) *Soit* $y_{12} \in]0,1[$, $j_{12} = \frac{1-z_{12}}{1-y_{12}}$, $z_{12} \in [0,1[$, $\alpha \in \mathbb{N}$, *alors on a les identités*

$$\mathrm{e}^{-j_{12}\mathbf{g}^2} (1 - y_{12})^{-\alpha/2} = \mathrm{e}^{-\mathbf{g}^2} \sum_{r,n \geq 0} \frac{(z_{12}\mathbf{g}^2)^r}{r!} y_{12}^n S_{r+\alpha/2-1}^{(n)}(\mathbf{g}^2) \doteqdot E_0(\alpha) \quad (A.63)$$

$$\mathrm{e}^{-j_{12}\mathbf{g}^2}(1-y_{12})^{-\alpha/2}\left(\frac{\alpha}{2}-1-j_{12}\mathbf{g}^2\right) = \\ \mathrm{e}^{-\mathbf{g}^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(z_{12}\mathbf{g}^2)^r}{r!}(n+1)y_{12}^n S_{r+\alpha/2-2}^{(n+1)}(\mathbf{g}^2) \doteqdot E_1(\alpha) \quad \text{(A.64)}$$

$$\mathrm{e}^{-j_{12}\mathbf{g}^2}(1-y_{12})^{-\alpha/2}\Big(\left(\tfrac{\alpha}{2}-1\right)\left(\tfrac{\alpha}{2}-2\right)+j_{12}\mathbf{g}^2(j_{12}\mathbf{g}^2-\alpha-2)\Big) = \\ \mathrm{e}^{-\mathbf{g}^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(z_{12}\mathbf{g}^2)^r}{r!}(n+2)(n+1)y_{12}^n S_{r+\alpha/2-3}^{(n+2)}(\mathbf{g}^2) \doteqdot E_2(\alpha). \quad \text{(A.65)}$$

Preuve (Identités de Sonine)

1. $E_0(\alpha)$.

$$\mathrm{e}^{-j_{12}\mathbf{g}^2}(1-y_{12})^{-\alpha/2} = \mathrm{e}^{-\frac{1-z_{12}}{1-y_{12}}\mathbf{g}^2}(1-y_{12})^{-\alpha/2} \quad \text{(A.66)}$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathbf{g}^2\frac{1-y_{12}+y_{12}}{1-y_{12}}}\sum_{r\geq 0}\frac{(z_{12}\mathbf{g}^2)^r}{r!}\frac{1}{(1-y_{12})^r}\frac{1}{1-y_{12}^{\alpha/2}} \quad \text{(A.67)}$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathbf{g}^2}\sum_{r\geq 0}\frac{(z_{12}\mathbf{g}^2)^r}{r!}\underbrace{\mathrm{e}^{-\mathbf{g}^2\frac{y_{12}}{1-y_{12}}}\frac{1}{(1-y_{12})^{r+\alpha/2}}}_{\underset{s\leftrightarrow y_{12},\, x\leftrightarrow\mathbf{g}^2}{\overset{(A.62)}{=}}\sum_{n\geq 0}y_{12}^n S_{r+\alpha/2-1}^{(n)}(\mathbf{g}^2)} \quad \text{(A.68)}$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathbf{g}^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(z_{12}\mathbf{g}^2)^r}{r!}y_{12}^n S_{r+\alpha/2-1}^{(n)}(\mathbf{g}^2), \quad \text{(A.69)}$$

ce qui établit (A.63).

2. $E_1(\alpha)$. En dérivant la relation précédente on a pour le membre de gauche

$$\frac{\partial}{\partial y_{12}}\left(\mathrm{e}^{-j_{12}\mathbf{g}^2}(1-y_{12})^{-\alpha/2}\right) = \mathrm{e}^{-j_{12}\mathbf{g}^2}(1-y_{12})^{-\alpha/2-1}\left(\frac{\alpha}{2}-j_{12}\mathbf{g}^2\right), \quad \text{(A.70)}$$

et pour le membre de droite

$$\frac{\partial}{\partial y_{12}}\mathrm{e}^{-\mathbf{g}^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(z_{12}\mathbf{g}^2)^r}{r!}(n+1)y_{12}^n S_{r+\alpha/2-2}^{(n+1)}(\mathbf{g}^2) \doteqdot E_1(\alpha) \\ = \mathrm{e}^{-\mathbf{g}^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(z_{12}\mathbf{g}^2)^r}{r!}ny_{12}^{n-1}S_{r+\alpha/2-1}^{(n)}(\mathbf{g}^2). \quad \text{(A.71)}$$

Le terme $n=0$ de cette dernière expression ne contribue pas, d'où en posant $m=n-1$ puis $m \doteqdot n$ on a

$$\frac{\partial}{\partial y_{12}}\mathrm{e}^{-\mathbf{g}^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(z_{12}\mathbf{g}^2)^r}{r!}(n+1)y_{12}^n S_{r+\alpha/2-2}^{(n+1)}(\mathbf{g}^2) \doteqdot E_1(\alpha) \\ = \mathrm{e}^{-\mathbf{g}^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(z_{12}\mathbf{g}^2)^r}{r!}(n+1)y_{12}^n S_{r+\alpha/2-1}^{(n+1)}(\mathbf{g}^2). \quad \text{(A.72)}$$

Égalant les membre de droite et de gauche

$$\mathrm{e}^{-j_{12}\mathbf{g}^2}(1-y_{12})^{-\alpha/2-1}\left(\frac{\alpha}{2}-j_{12}\mathbf{g}^2\right) = \mathrm{e}^{-\mathbf{g}^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(z_{12}\mathbf{g}^2)^r}{r!}(n+1)y_{12}^n S_{r+\alpha/2-1}^{(n+1)}(\mathbf{g}^2), \quad (A.73)$$

et en posant $\beta/2=\alpha/2+1$ puis $\beta \doteqdot \alpha$ on a

$$\mathrm{e}^{-j_{12}\mathbf{g}^2}(1-y_{12})^{-\alpha/2}\left(\frac{\alpha}{2}-1-j_{12}\mathbf{g}^2\right) = \mathrm{e}^{-\mathbf{g}^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(z_{12}\mathbf{g}^2)^r}{r!}(n+1)y_{12}^n S_{r+\alpha/2-2}^{(n+1)}(\mathbf{g}^2) \doteqdot E_1(\alpha), \quad (A.74)$$

ce qui établit (A.64).

3. $E_2(\alpha)$. En dérivant (A.64), le membre de gauche devient

$$\frac{\partial}{\partial y_{12}}\mathrm{e}^{-j_{12}\mathbf{g}^2}(1-y_{12})^{-\alpha/2}\Big(\left(\tfrac{\alpha}{2}-1\right)\left(\tfrac{\alpha}{2}-2\right)+j_{12}\mathbf{g}^2(j_{12}\mathbf{g}^2-\alpha-2)\Big) = \mathrm{e}^{-j_{12}\mathbf{g}^2}(1-y_{12})^{-\alpha/2-1}\left(\tfrac{\alpha}{2}\left(\tfrac{\alpha}{2}-1\right)+j_{12}\mathbf{g}^2(j_{12}\mathbf{g}^2-\alpha)\right), \quad (A.75)$$

et le membre de droite en procédant comme pour $E_1(\alpha)$

$$\frac{\partial}{\partial y_{12}}\mathrm{e}^{-\mathbf{g}^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(z_{12}\mathbf{g}^2)^r}{r!}(n+2)(n+1)y_{12}^n S_{r+\alpha/2-3}^{(n+2)}(\mathbf{g}^2) \doteqdot E_2(\alpha) = \mathrm{e}^{-\mathbf{g}^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(z_{12}\mathbf{g}^2)^r}{r!}(n+2)(n+1)y_{12}^n S_{r+\alpha/2-2}^{(n+2)}(\mathbf{g}^2). \quad (A.76)$$

Égalant les membres de droite et de gauche

$$\mathrm{e}^{-j_{12}\mathbf{g}^2}(1-y_{12})^{-\alpha/2-1}\left(\tfrac{\alpha}{2}\left(\tfrac{\alpha}{2}-1\right)+j_{12}\mathbf{g}^2(j_{12}\mathbf{g}^2-\alpha)\right) == \mathrm{e}^{-\mathbf{g}^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(z_{12}\mathbf{g}^2)^r}{r!}(n+2)(n+1)y_{12}^n S_{r+\alpha/2-2}^{(n+2)}(\mathbf{g}^2), \quad (A.77)$$

avec $\beta=\alpha/2+1$ puis $\beta \doteqdot \alpha$

$$\mathrm{e}^{-j_{12}\mathbf{g}^2}(1-y_{12})^{-\alpha/2}\Big(\left(\tfrac{\alpha}{2}-1\right)\left(\tfrac{\alpha}{2}-2\right)+j_{12}\mathbf{g}^2(j_{12}\mathbf{g}^2-\alpha-2)\Big) = \mathrm{e}^{-\mathbf{g}^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(z_{12}\mathbf{g}^2)^r}{r!}(n+2)(n+1)y_{12}^n S_{r+\alpha/2-3}^{(n+2)}(\mathbf{g}^2) \doteqdot E_2(\alpha), \quad (A.78)$$

ce qui établit (A.65).

■

Appliquant ce lemme, (A.61) devient (on élimine les termes en j_{12}^k, $k\geq 1$, en commençant par le plus haut degré) après quelques calculs

$$G_{12}(\chi) = E_0(5)3\mathbf{g}^2\frac{ST}{st}+E_0(9)\frac{3}{4}\frac{st}{ST}\mathbf{g}^2\left(S^2+T^2-2ST\cos\chi\right)+E_2(7) + E_0(7)\left(\frac{35}{2}+3\mathbf{g}^2(\cos\chi-1)\left(1+\tfrac{1}{2}(T+S)\right)+2\mathbf{g}^4(1-\cos\chi)\right) + E_1(7)\left(2\mathbf{g}^2(1-\cos\chi)-7\right). \quad (A.79)$$

Que représente le résultat obtenu à ce stade ? On a exprimé $G_{12}(\chi)$ de manière implicite en fonction des polynômes de Sonine. Pour continuer, il faut exprimer explicitement $G_{12}(\chi)$ en terme des polynômes de Sonine et y remplacer les expressions de y_{12} et z_{12}, utiliser la relation binômiale et mettre en évidence les puissances de s et t. On voit tout de suite que pour mettre en oeuvre cette mise en évidence il va falloir faire un développement des fonctions $S = S(s)$ et $T = T(t)$. La mise en évidence de ces coefficients ne sera donc pas aisée pour tous les ordres. Mais il va être possible de se limiter à l'ordre le plus bas s^0t^0 car on désire uniquement b_{00}.

Développement de Taylor

Remplaçant $E_i(j)$ et $y_{12} = s/2+t/2$, $z_{12} = 1/2st(1-\cos\chi)$, $S = s(1-s)^{-1}$, $T = t(1-t)^{-1}$, on a

$$\begin{aligned}G_{12}(\chi) = \mathrm{e}^{-\mathbf{g}^2} \sum_{r,n\geq 0} \frac{(z_{12}\mathbf{g}^2)^r}{r!} y_{12}^n \Bigg(& S^{(n)}_{r+3/2}(\mathbf{g}^2) 3\mathbf{g}^2 \frac{ST}{st} \\ & + S^{(n)}_{r+7/2}(\mathbf{g}^2) \frac{3}{4}\frac{st}{ST}\mathbf{g}^2(S^2+T^2-2ST\cos\chi) + (n+2)(n+1)S^{(n+2)}_{r+1/2}(\mathbf{g}^2) \\ & + S^{(n)}_{r+5/2}(\mathbf{g}^2)\left(\tfrac{35}{2} + 3\mathbf{g}^2(\cos\chi-1)(1+\tfrac{1}{2}(T+S)) + 2\mathbf{g}^4(1-\cos\chi)\right) \\ & + (n+1)S^{(n+1)}_{r+3/2}(\mathbf{g}^2)(2\mathbf{g}^2(1-\cos\chi)-7)\Bigg). \end{aligned} \tag{A.80}$$

Comme $y_{12}^n = \frac{1}{2^n}(s+t)^n$ on devrait en toute généralité utiliser la formule du binôme $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ pour mettre en évidence les différentes puissances de s et t. Néanmoins, étant donné que nous ne cherchons que b_{00}, c'est-à-dire l'ordre le plus bas s^0t^0, alors il suffit de développer le membre de droite de (A.63) au plus bas ordre en s et t avec

$$ST = \mathcal{O}(st) \tag{A.81}$$

$$\frac{ST}{st} = 1 + \mathcal{O}(s,t) \tag{A.82}$$

$$\frac{st}{ST} = 1 + \mathcal{O}(s,t) \tag{A.83}$$

$$S^2 = \mathcal{O}\left(s^2\right) \tag{A.84}$$

$$T^2 = \mathcal{O}\left(t^2\right) \tag{A.85}$$

$$S = \mathcal{O}(s) \tag{A.86}$$

$$T = \mathcal{O}(t), \tag{A.87}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}G_{12}(\chi) = \mathrm{e}^{-\mathbf{g}^2}\Big(& 2S^{(2)}_{1/2}(\mathbf{g}^2) + S^{(1)}_{3/2}(\mathbf{g}^2)(2\mathbf{g}^2(1-\cos\chi)-7) \\ & + \tfrac{35}{7} + 3\mathbf{g}^2\cos\chi + 2\mathbf{g}^4(1-\cos\chi)\Big).\end{aligned} \tag{A.88}$$

On utilise

$$S^{(1)}_l(x) = l+1-x \tag{A.89}$$

$$S^{(2)}_l(x) = 1/2(l+1)(l+2) - (l+2)x + 1/2x^2, \tag{A.90}$$

d'où finalement

$$G_{12}(\chi) = \mathrm{e}^{-\mathbf{g}^2}\left(\frac{15}{4} + 7\mathbf{g}^2 + \mathbf{g}^4 - 2\mathbf{g}^2\cos\chi\right). \tag{A.91}$$

On désire obtenir une expression de la forme

$$G_{12}(\chi) = \mathrm{e}^{-\mathbf{g}^2}\sum_{pqrl\geq 0} A_{pqrl}(s/2)^p(t/2)^q\mathbf{g}^{2r}\cos^l\chi, \tag{A.92}$$

d'où par comparaison de (A.91) et (A.92) on a $p = q = 0\ \forall\ r, l$, et

$$\boxed{\begin{array}{lcl} A_{0000} & = & \frac{15}{4} \\ A_{0010} & = & 7 \\ A_{0011} & = & -2 \\ A_{0020} & = & 1. \end{array}} \tag{A.93}$$

Ces 4 coefficients déterminent l'ordre le plus bas, et par conséquent le premier terme de b_{00}.

Expression du premier terme

Commençons par établir un résultat général pour p et q quelconques. On a

$$\begin{aligned}\left[S_{5/2}^{(p)}(\mathbf{w}_1^2)\mathbf{w}_1^2, S_{5/2}^{(q)}(\mathbf{w}_2^2)\mathbf{w}_2^2\right]_{12} = \frac{1}{s^pt^q}\left(\frac{ST}{st}\right)^{7/2}\int \mathrm{d}^3\mathbf{g}\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\ \mathbf{g}\,b\,\times \\ \times\left(L_{12}(0) - L_{12}(\chi)\right) + \mathcal{O}\left(s^kt^l, k\neq p, l\neq q\right),\end{aligned} \tag{A.94}$$

or on a calculé

$$\begin{aligned} G_{12}(\chi) &= \left(\frac{ST}{st}\right)^{7/2}\frac{1}{M_1M_2}\frac{1}{\pi^{3/2}}L_{12}(\chi) \\ &= \mathrm{e}^{-\mathbf{g}^2}\sum_{p,q,r,l\geq 0} A_{pqrl}(M_1s)^p(M_2t)^q\mathbf{g}^{2r}\cos^l\chi, \end{aligned} \tag{A.95}$$

d'où

$$\begin{aligned} M_1M_2\frac{1}{\pi^{3/2}}G_1(\chi) &= \left(\frac{ST}{st}\right)^{7/2}\frac{1}{\pi^3}L_{12}(\chi) \\ &= M_1M_2\frac{1}{\pi^{3/2}}\mathrm{e}^{-\mathbf{g}^2}\sum_{pqrl\geq 0} A_{pqrl}(M_1s)^p(M_2t)^q\mathbf{g}^{2r}\cos^l\chi, \end{aligned} \tag{A.96}$$

ainsi

$$\begin{aligned}\left[S_{5/2}^{(p)}(\mathbf{w}_1^2)\mathbf{w}_1^2, S_{5/2}^{(q)}(\mathbf{w}_2^2)\mathbf{w}_2^2\right]_{12} = M_1^{p+1}M_2^{q+1}\frac{1}{\pi^{3/2}}\int \mathrm{d}^3\mathbf{g}\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\ \mathbf{g}\,b\,\mathrm{e}^{-\mathbf{g}^2}\times \\ \times\sum_{r,l\geq 0} A_{pqrl}\mathbf{g}^{2r}(1-\cos^l\chi).\end{aligned} \tag{A.97}$$

Il y a symétrie de la solution en $\mathbf{g}$, donc $\mathrm{d}^3\mathbf{g} = 4\pi\mathbf{g}^2\mathrm{d}g$. De plus il y a indépendance dans l'angle ε, $\varepsilon \in [0, 2\pi]$, par conséquent

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \left[S^{(p)}_{5/2}(\mathbf{w}_1^2)\mathbf{w}_1^2, S^{(q)}_{5/2}(\mathbf{w}_2^2)\mathbf{w}_2^2\right]_{12} & = & 8M_1^{p+1}M_2^{q+1}\sum\limits_{r,l\geq 0} A_{pqrl}\Omega_1^{(l)}(r) \\ \Omega_1^{(l)}(r) & = & \sqrt{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{d}g\,\mathrm{d}b\; g\, b\, \mathrm{e}^{-g^2} g^{2r+2}(1-\cos^l\chi). \end{array}} \tag{A.98}$$

La fonction $\Omega_1^{(l)}(r)$ est connue pour une force d'interaction en $|\mathbf{x}|^{-\nu}$ (calcul numérique), c'est-à-dire

$$\Omega_{12}^{(l)}(r) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{X}}{2k_BT}\right)^{\frac{2}{\nu-1}} A_l(\nu)\,\Gamma\left(r+2-\tfrac{2}{\nu-1}\right), \tag{A.99}$$

où $A_l(\nu)$ est un facteur numérique résultant d'intégrations numériques. Dans le cas d'un gaz de molécules maxwelliennes $\nu = 5$, $M_1 = m_1/m_0 = 1/2$, $M_2 = m_2/m_0 = 1/2$, $m_0 = m_1 + m_2 = 2m$, en utilisant la relation $\Gamma(n+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(2n-1)!!$, $n \in \mathbb{N}$

$$\Omega_1^{(l)}(r) = \frac{\pi}{2^{r+2}}(2r+1)!!A_l(5)\sqrt{\frac{2\mathcal{X}}{m}}. \tag{A.100}$$

De plus, on a les relations $\Omega_1^{(0)}(r) = 0$ et $\Omega_1^{(l)}(r) > 0\ \forall\ l > 0$, $r \geq 0$.

(A.98) et (A.100) avec les valeurs trouvées de A_{pqrl} donnent

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \left[S^{(p)}_{5/2}(\mathbf{w}_1^2)\mathbf{w}_1^2, S^{(q)}_{5/2}(\mathbf{w}_2^2)\mathbf{w}_2^2\right]_{12} & = & -4\Omega_1^{(1)}(1) \\ \Omega_1^{(1)}(1) & = & \dfrac{3}{8}\pi A_1(5)\sqrt{\dfrac{2\mathcal{X}}{m}}, \end{array}} \tag{A.101}$$

où $A_1(5) = 0.422\ldots$.

A.1.3 Second terme $[1,1]_{12}$

La démarche est similaire à celle du calcul de $\left[S^{(p)}_{5/2}(\mathbf{w}_1^2)\mathbf{w}_1^2, S^{(q)}_{5/2}(\mathbf{w}_2^2)\mathbf{w}_2^2\right]_{12}$. L'expression en question est égale au coefficient de s^pt^q de l'expansion de

$$\left(\frac{ST}{st}\right)^{7/2}\frac{1}{\pi^3}\int \mathrm{d}^3\mathbf{g}\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\;\mathbf{g}\,b\,(L_1(0) - L_1(\chi)) \tag{A.102}$$

$$L_1(\chi) = \int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3\mathbf{w}_0\;\mathrm{e}^{-\mathbf{w}_0^2-\mathbf{g}^2-S\mathbf{w}_1'^2-T\mathbf{w}_1^2}. \tag{A.103}$$

Simplification de L_1

En utilisant les relations

$$\mathbf{w}_1 = \sqrt{M_1}\mathbf{w}_0 - \sqrt{M_2}\mathbf{g} \tag{A.104}$$

$$\mathbf{w}_1' = \sqrt{M_1}\mathbf{w}_0 - \sqrt{M_2}\mathbf{g}' \tag{A.105}$$

on a les relations similaires à celles du calcul du premier terme

$$\mathbf{w}_0^2 + \mathbf{g}^2 + S\mathbf{w}_1'^2 + T\mathbf{w}_1^2 = i_1\mathbf{w}_0^2 + i_2\mathbf{g}^2 - 2\sqrt{M_1M_2}\mathbf{w}_0(S\mathbf{g}' + T\mathbf{g}) \tag{A.106}$$

$$i_1 = 1 + M_1(S+T) \tag{A.107}$$

$$i_2 = 1 + M_2(S+T), \tag{A.108}$$

ce qui donne

$$L_1(\chi) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{w}_0 \ \mathrm{e}^{-i_1\mathbf{w}_0^2 - i_2\mathbf{g}^2 + 2\sqrt{M_1M_2}\mathbf{w}_0(S\mathbf{g}'+T\mathbf{g})}\mathbf{w}_1^{'2}\mathbf{w}_1^2, \tag{A.109}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1^{'2} &= M_1\mathbf{w}_0^2 + M_2\mathbf{g}^{'2} - 2\sqrt{M_1M_2}\mathbf{w}_0\mathbf{g}' \\ &= M_1\mathbf{w}_0^2 + M_2\mathbf{g}^2 - 2\sqrt{M_1M_2}\mathbf{w}_0\mathbf{g}' && \text{(A.110)} \\ \mathbf{w}_1^2 &= M_1\mathbf{w}_0^2 + M_2\mathbf{g}^{'2} - 2\sqrt{M_1M_2}\mathbf{w}_0\mathbf{g}. && \text{(A.111)} \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} j_1 &= i_2 - \frac{M_1M_2}{i_1}(S^2 + T^2 + 2ST\cos\chi) && \text{(A.112)} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{w}_0 - \frac{\sqrt{M_1M_2}}{i_1}(S\mathbf{g}' + T\mathbf{g}), \qquad \mathrm{d}^3\mathbf{v} = \mathrm{d}^3\mathbf{w}_0, && \text{(A.113)} \end{aligned}$$

alors on établi

$$-i_1\mathbf{w}_0^2 - i_2\mathbf{g}^2 + 2\sqrt{M_1M_2}\mathbf{w}_0(S\mathbf{g}' + T\mathbf{g}) = -i_1\mathbf{v}^2 - j_1\mathbf{g}^2, \tag{A.114}$$

donc

$$L_1(\chi) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{v} \ \mathrm{e}^{-i_1\mathbf{v}^2 - j_1\mathbf{g}^2}\mathbf{w}_1^{'2}\mathbf{w}_1^2. \tag{A.115}$$

Écrivons $\mathbf{w}_1^2$ et $\mathbf{w}_1^{'2}$ en terme de $\mathbf{v}$ donné par (A.113). Soit

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{M_1}{i_1}(S\mathbf{g}' + T\mathbf{g}) - \mathbf{g}' && \text{(A.116)} \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{M_1}{i_1}(S\mathbf{g}' + T\mathbf{g}) - \mathbf{g}, && \text{(A.117)} \end{aligned}$$

alors on trouve

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1' &= \sqrt{M_1}\mathbf{v} + \sqrt{M_2}\mathbf{v}_1 && \text{(A.118)} \\ \mathbf{w}_1 &= \sqrt{M_1}\mathbf{v} + \sqrt{M_2}\mathbf{v}_2, && \text{(A.119)} \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1^{'2} &= M_1\mathbf{v}^2 + M_2\mathbf{v}_1^2 + 2\sqrt{M_1M_2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_1 && \text{(A.120)} \\ \mathbf{w}_1^2 &= M_1\mathbf{v}^2 + M_2\mathbf{v}_2^2 + 2\sqrt{M_1M_2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_2, && \text{(A.121)} \end{aligned}$$

donc on trouve

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1^{'2}\mathbf{w}_1^2 = M_1\mathbf{v}^4 + \mathbf{v}^2M_1M_2(\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2) + 4M_1M_2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_1)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_2) \\ + M_2^2\mathbf{v}_1^2\mathbf{v}_2^2 + \mathcal{O}\left(\mathbf{v}^{2k+1}, k\in\mathbb{N}\right). \quad \text{(A.122)} \end{aligned}$$

Il est en effet possible de négliger les termes impairs en $\mathbf{v}$ car cette dernière expression va être intégrée sur une mesure gaussienne dans un domaine symétrique. On peut donc calculer

$$\begin{aligned} L_1(\chi) = M_1M_2\pi^{3/2}\mathrm{e}^{-j_1\mathbf{g}^2}i_1^{-7/2}\Bigg(\frac{15}{4}\frac{M_1}{M_2} + i_1\left(\tfrac{3}{2}\left(\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2\right) + 2(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)\right) \\ + i_1^2\frac{M_2}{M_1}\mathbf{v}_1^2\mathbf{v}_2^2\Bigg). \quad \text{(A.123)} \end{aligned}$$

Il est encore nécessaire d'exprimer $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1^2\mathbf{v}_2^2$ et $\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2$ en terme de $\mathbf{g}^2$. Pour ce faire, on se place déjà dans le cas particulier $M_1 = M_2$ qui nous intéresse, ce qui permet d'obtenir en utilisant $\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}' = \mathbf{g}^2 \cos\chi$ et $\mathbf{g} \wedge \mathbf{g}' = \mathbf{g}^2 \sin\chi$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= \frac{\mathbf{g}^2}{i_1}(1 - j_1 + \cos\chi) && \text{(A.124)}\\
\mathbf{v}_1^2\mathbf{v}_2^2 &= \frac{\mathbf{g}^4}{i_1^2}\left(2 + 2\cos\chi - 2\cos\chi j_1 - 2j_1 + j_1^2\right) && \text{(A.125)}\\
\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2 &= \frac{2\mathbf{g}^2}{i_1}\left(1 - j_1 - M_1(S+T)\cos\chi\right) + 2\mathbf{g}^2. && \text{(A.126)}
\end{aligned}$$

Ainsi, en gardant les variables M_1 et M_2 où cela n'a pas été nécessaire pour obtenir les relations (A.124) à (A.126) on trouve après quelques calculs

$$\begin{aligned}
L_1(\chi) = M_1 M_2 \pi^{3/2} \mathrm{e}^{-j_1\mathbf{g}^2} i_1^{-7/2} \Big(&\frac{15}{4} + 3\mathbf{g}^2 i_1(1 - \cos\chi) + 5\mathbf{g}^2\cos\chi + 5\mathbf{g}^2 \\
&- 5\mathbf{g}^2 j_1 + 2\mathbf{g}^4 + 2\mathbf{g}^4\cos\chi - 2\mathbf{g}^4\cos\chi j_1 - 2\mathbf{g}^4 j_1 + \mathbf{g}^4 j_1^2\Big) \quad \text{(A.127)}
\end{aligned}$$

On peut montrer que i_1 et j_1 sont aussi égaux à

$$\begin{aligned}
i_1 &= \frac{1 - M_2(S+T) + (M_2 - M_1)st}{(1-s)(1-t)} && \text{(A.128)}\\
j_1 &= \frac{1 - st(M_1^2 + M_2^2 + 2M_1M_2\cos\chi)}{1 - M_2(s+t) + (M_2 - M_1)st}, && \text{(A.129)}
\end{aligned}$$

d'où en définissant

$$\begin{aligned}
z_1 &= st(M_1^2 + M_2^2 + 2M_1M_2\cos\chi) && \text{(A.130)}\\
y_1 &= M_2(s+t) - (M_2 - M_1)st && \text{(A.131)}
\end{aligned}$$

on a les relations similaires que lors du calcul du premier terme

$$\left\{\begin{array}{lllllllll}
\dfrac{i_{12}}{ST} & = & \dfrac{1-y_{12}}{st}, & \dfrac{\partial j_{12}}{\partial y_{12}} & = & \dfrac{j_{12}}{1-y_{12}}, & j_{12} & = & \dfrac{1-z_{12}}{1-y_{12}} \\
S & = & \dfrac{s}{1-s}, & T & = & \dfrac{t}{1-t}, & s,t & \in &]0,1[,
\end{array}\right. \quad \text{(A.132)}$$

donc le lemme A.1.1 utilisé pour effectuer la mise en évidence des polynômes de Sonine est aussi valable dans notre cas présent. Étudions la fonction

$$G_1(\chi) = \left(\frac{ST}{st}\right)^{7/2} \frac{1}{\pi^3} L_1(\chi), \quad \text{(A.133)}$$

alors en appliquant le lemme A.1.1 on obtient

$$\begin{aligned}
G_1(\chi) = \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}} \Big(&3\mathbf{g}^2(1 - \cos\chi)\frac{ST}{st}E_0(5) + E_0(7)\left(2\mathbf{g}^4(1 + \cos\chi) + 10\right) \\
&+ E_2(7) + E_1(7)\left(2\mathbf{g}^2 + 2\mathbf{g}^2\cos\chi - 4\right)\Big). \quad \text{(A.134)}
\end{aligned}$$

En y substituant l'expression de $E_i(j)$ on a

$$G_1(\chi) = \frac{M_1 M_2}{\pi^{3/2}} \mathrm{e}^{-\mathbf{g}^2} \sum_{r,n\geq 0} \frac{(z_1 \mathbf{g}^2)^r}{r!} y_1^n \Bigg(3\mathbf{g}^2(1-\cos\chi)\frac{ST}{st} S_{r+3/2}^{(n)}(\mathbf{g}^2) + (n+2)(n+1) S_{r+1/2}^{(n+2)}(\mathbf{g}^2) + S_{r+5/2}^{(n)}(\mathbf{g}^2)\left(2\mathbf{g}^4 + 2\mathbf{g}^4\cos\chi + 10\right) + (n+1) S_{r+3/2}^{(n+1)}(\mathbf{g}^2)\left(2\mathbf{g}^2 + 2\mathbf{g}^2\cos\chi - 4\right)\Bigg) \quad (A.135)$$

Développement de Taylor

À nouveau, ne prenant que l'ordre le plus bas $r = n = 0$ et le premier ordre du développement de Taylor des fonctions de S, T, s et t, en utilisant

$$S_{3/2}^{(1)}(\mathbf{g}^2) = \frac{5}{2} - \mathbf{g}^2 \quad (A.136)$$

$$S_{1/2}^{(2)}(\mathbf{g}^2) = \frac{15}{4} - \frac{5}{2}\mathbf{g}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{g}^4 \quad (A.137)$$

on obtient

$$G_1(\chi) = \frac{M_1 M_2}{\pi^{3/2}} \mathrm{e}^{-\mathbf{g}^2} \left(\frac{15}{2} + 7\mathbf{g}^2 + 2\mathbf{g}^2\cos\chi + \mathbf{g}^4\right), \quad (A.138)$$

que l'on compare à

$$G_1(\chi) = \frac{M_1 M_2}{\pi^{3/2}} \mathrm{e}^{-\mathbf{g}^2} \sum_{p,q,r,l\geq 0} A_{pqrl} (M_1 s)^p (M_2 t)^q \mathbf{g}^{2r} \cos^l \chi \quad (A.139)$$

pour obtenir

$$\boxed{\begin{array}{lcl} A_{0000} & = & \frac{15}{2} \\ A_{0010} & = & 7 \\ A_{0011} & = & 1 \\ A_{0020} & = & 2. \end{array}} \quad (A.140)$$

Expression du second terme

La solution s'écrit donc

$$\left[S_{5/2}^{(p)}(\mathbf{w}_1^2)\mathbf{w}_1^2, S_{5/2}^{(q)}(\mathbf{w}_1^2)\mathbf{w}_1^2\right]_{12} = \frac{1}{s^p t^q} \frac{M_1 M_2}{\pi^{3/2}} \int \mathrm{d}^3\mathbf{g}\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\; \mathbf{g}\, b\, \mathrm{e}^{-\mathbf{g}^2} \times \times \sum_{r,l\geq 0} A_{pqrl}(M_1 s)^p (M_2 t)^q \mathbf{g}^{2r}(1-\cos^l\chi) + \mathcal{O}\left(s^k t^l, k\neq p, l\neq q\right), \quad (A.141)$$

ce qui donne

$$\left[S_{5/2}^{(p)}(\mathbf{w}_1^2)\mathbf{w}_1^2, S_{5/2}^{(q)}(\mathbf{w}_1^2)\mathbf{w}_1^2\right]_{12} = 8 M_1^{p+1} M_2^{q+1} \sum_{r,l\geq 0} A_{pqrl}\Omega_1^{(l)}(r) \quad (A.142)$$

$$\Omega_1^{(l)}(r) = \sqrt{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}g\,\mathrm{d}b\; g\, b\, \mathrm{e}^{-g^2} g^{2r}(1-\cos^l\chi). \quad (A.143)$$

En particulier dans le cas $p = q = 0$ qui nous intéresse, les valeurs (A.140) permettent d'obtenir

$$\boxed{\begin{aligned} \left[S^{(p)}_{5/2}(\mathbf{w}_1^2)\mathbf{w}_1^2, S^{(q)}_{5/2}(\mathbf{w}_2^2)\mathbf{w}_2^2\right]_{12} &= 4\Omega_1^{(1)}(1) \\ \Omega_1^{(1)}(1) &= \frac{3}{8}\pi A_1(5)\sqrt{\frac{2\mathcal{X}}{m}}. \end{aligned}} \tag{A.144}$$

A.1.4 Nullité du coefficient

Comme

$$\begin{aligned} b_{00} &= \left[S^{(p)}_{5/2}(\mathbf{w}_1^2)\mathbf{w}_1^2, S^{(q)}_{5/2}(\mathbf{w}_1^2)\mathbf{w}_1^2\right]_1 \\ &= \left[S^{(p)}_{5/2}(\mathbf{w}_1^2)\mathbf{w}_1^2, S^{(q)}_{5/2}(\mathbf{w}_1^2)\mathbf{w}_1^2\right]_{12} + \left[S^{(p)}_{5/2}(\mathbf{w}_1^2)\mathbf{w}_1^2, S^{(q)}_{5/2}(\mathbf{w}_2^2)\mathbf{w}_2^2\right]_{12}, \end{aligned} \tag{A.145}$$

alors (A.101) et (A.144) impliquent

$$\boxed{b_{00} = 4\Omega_1^{(1)}(1) - 4\Omega_1^{(1)}(1) = 0,} \tag{A.146}$$

et par conséquent le coefficient c_0 est nul.

Bibliographie

[Ba] R. Balescu, *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics*, John Wiley & Sons, 1975. (Gros livre bleu - pas mal)

[BCH] R. B. Bird, C. F. Curtiss, J. O. Hirschtelder, *Molecular Theory of Gases and Liquids*, John Wiley & Sons, New York, 1954. (très gros livre vert foncé - pas mal)

[Be] B. J. Berne, *Statistical Mechanics Part B : Time-Dependent Processes*, Chap. 3 (J. R. Dorfman and H. van Beijeren), Plenum Press, New York, 1977. (mince livre bleu foncé, noir - très clair et contenu intéressant)

[CC] S. Chapman, T. G. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Third Edition, Cambridge University Press, 1970. (Livre bleu clair épaisseur moyenne de la bibliothèque de mathématique - référence sur le sujet, pas évident à comprendre)

[Ce] C. Cercignani, *The Boltzmann Equation and its Applications*, Vol. 67, Springer-Verlag, New-York, 1975. (Livre jaune épaisseur moyenne - quelques formalisations utiles, très mathématisé, pas exactement les méthodes standard)

[Kr] H. J. Kreuzer, *Nonequilibrium Thermodynamics and its Statistical Foundations*, Oxford University Press, New York, 1981. (Livre bleu-foncé épaisseur moyenne - survol du sujet, quelques erreurs - pas mal)

[Pi] J. Piasecki, *Échelles de temps en théorie cinétique*, PPUR, Lausanne, 1997. (tout petit livre PPUR blanc sur la théorie des échelles de temps)

[UF] George E. Uhlenbeck, George W. Ford, *Lectures in Statistical Mechanics*, AMS, RhodeIsland, 1963. (référence 1 Piasecki, livre vert)

[RL] P. Résibois, M. De Leener, *Classical Kinetic Theory of Fluids*, John Wiley & Sons, 1977. (référence 2 Piasecki, livre brun)